

(問題 5)

実数 x の小数部分を、 $0 \leq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 y のこととし、これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して、無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように定める。

(i) $a_1 = \langle a \rangle$

(ii)
$$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = 0 \end{cases}$$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき、数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\frac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

(3) a が有理数であるとする。 a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \frac{p}{q}$ と表すとき、 q 以上のすべての自然数 n に対して、 $a_n = 0$ であることを示せ。
