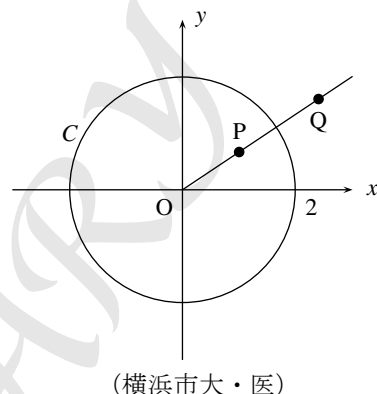


(問題 4)

座標平面上の原点  $O$  を中心とする半径 2 の円を  $C$  とする。 $O$  を始点とする半直線上の 2 点  $P, Q$  について  $OP \cdot OQ = 4$  が成立するとき、 $P$  と  $Q$  は  $C$  に関して対称であるという (右の図では、 $P$  は  $C$  の内側にとつてある)。



(1) 点  $P(x, y)$  の  $C$  に関して対称な点  $Q$  の座標を  $x, y$  を用いて表せ。

(2) 点  $P(x, y)$  が原点を除いた曲線  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$  上を動くとき、 $Q$  の軌跡を求めよ。

(1)

🔗  $Q$  の座標を求めるには、 $\vec{OQ}$  を求めればよい。

🔗  $P, Q$  は  $O$  を始点とする半直線上にあるので、 $\vec{OP}$  と  $\vec{OQ}$  は同じ向きである。つまり、互いに他の正の実数倍に書ける。

🔗  $\vec{OQ} = k\vec{OP}$  ( $k > 0$ ) と書けるが、 $OP \cdot OQ = 4$  より  $k$  が分かる。また  $OP \cdot OQ = 4$  より  $P$  は原点ではない。

•  $OP \cdot OQ = 4$  であるから、 $OQ = \frac{4}{OP}$  である。従って、 $\vec{OQ}$  は  $\vec{OP}$  と同じ向きで長さが  $\frac{4}{OP}$  のベクトルである。

•  $\vec{OP}$  と同じ向きで長さが 1 のベクトルは  $\frac{1}{OP}\vec{OP}$  である。

• 従って、 $\vec{OQ} = \frac{4}{OP} \cdot \left( \frac{1}{OP}\vec{OP} \right) = \frac{4}{OP^2}\vec{OP} = \frac{4}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  となり、 $Q \left( \frac{4x}{x^2 + y^2}, \frac{4y}{x^2 + y^2} \right)$

(2)

🔗  $P(x, y)$  が満たすべき条件  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$  かつ  $(x, y) \neq (0, 0)$  をベクトルで言い換えておく。

•  $A(2, 3)$  とおくと、 $P$  が満たすべき条件は  $|\vec{PA}|^2 = 13$  かつ  $\vec{OP} \neq \vec{0}$  である。

•  $|\vec{OP} - \vec{OA}|^2 = 13$  を変形すると、 $|\vec{OP}|^2 - 2\vec{OP} \cdot \vec{OA} + |\vec{OA}|^2 = 13$  となるが、今  $|\vec{OA}|^2 = 13$  であるから、 $|\vec{OP}|^2 - 2\vec{OP} \cdot \vec{OA} = 0 \dots \textcircled{1}$  かつ  $OP \neq \vec{0}$  が  $P$  の満たすべき条件となる。

  $OP$  を  $OQ$  で表し、 $P$  が満たすべき条件に代入すれば  $Q$  の軌跡が分かる。

- $OP \cdot OQ = 4$  より  $\vec{OP} \neq \vec{0}$  は自動的に満たされる。
- $O$  を始点とする半直線上に  $P, Q$  はあり、 $OP \cdot OQ = 4$  であるから  $\vec{OP}$  は、 $\vec{OQ}$  と同じ向きで長さが  $\frac{4}{|\vec{OQ}|}$  である。 $\vec{OQ}$  と同じ向きで長さ 1 のベクトルは  $\frac{1}{|\vec{OQ}|} \vec{OQ}$  であるから、 $\vec{OP} = \frac{4}{|\vec{OQ}|^2} \vec{OQ}$  となる。
- これを ① に代入して、 $\frac{16}{|\vec{OQ}|^4} |\vec{OQ}|^2 - 2 \cdot \frac{4}{|\vec{OQ}|^2} \vec{OQ} \cdot \vec{OA} = 0$  つまり  $16 - 8\vec{OQ} \cdot \vec{OA} = 0$   
従って、 $\vec{OA} \cdot \vec{OQ} = 2$  となる。
- $Q(x, y)$  とおくと  $\vec{OA} \cdot \vec{OQ} = 2$  より、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2$  つまり  $2x + 3y = 2$  となり、 $Q$  の軌跡は  
直線  $2x + 3y = 2$  である。