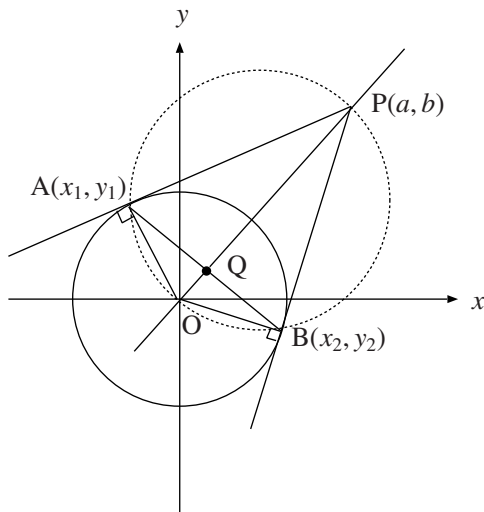


(問題 3)

xy 平面上の円 $x^2 + y^2 = 1$ へ、この円の外部の点 $P(a, b)$ から 2 本の接線を引き、その接点を A, B とし、線分 AB の中点を Q とする。

- (1) 点 Q の座標を a, b を用いて表せ。
- (2) 点 P が円 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ 上を動くとき、点 Q の軌跡を求めよ。

(北海道大・理)



(1)

✎ まず、 O, Q, P は 1 直線上にあることを示し、その後で直角三角形の相似を利用して $k = \frac{OQ}{OP}$ を求める。
 そうすると $\vec{OQ} = k\vec{OP}$ より Q の座標が分かる。

- A, B は接点であるから、 $OA \perp PA, OB \perp PB$ である。よって A, B は OP を直径とする円周上にある。
- そうすると、線分 AB は 2 円の共通弦である。円の中心は弦の垂直 2 等分線上にあるから、 O, P はともに線分 AB の垂直 2 等分線上にある。
- Q は AB の中点であるから、線分 AB の垂直 2 等分線（つまり直線 OP ）上にある。従って、 O, Q, P は 1 直線上にある。
- 2 つの直角三角形 $\triangle OQA$ と $\triangle OAP$ は相似であるから（ $\angle AOQ$ が共通）、

$$\frac{OQ}{OA} = \frac{OA}{OP} \quad \text{つまり} \quad OQ = \frac{OA^2}{OP} = \frac{1}{OP} \cdots (*) \quad \lll OA \text{ は半径であるから } OA = 1$$

• よって $\frac{OQ}{OP} = \frac{1}{OP^2} = \frac{1}{a^2 + b^2}$ となるから $\vec{OQ} = \frac{1}{a^2 + b^2} \vec{OP} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ である。

$$\therefore \boxed{Q\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2}\right)}$$

[注]

一般に、楕円 (円) $Ax^2 + By^2 = 1 \dots \textcircled{1}$ の外部の点 (a, b) から $\textcircled{1}$ に引いた 2 接線の接点を結ぶ直線は $Aax + Bby = 1$ である。

\therefore 接点を $(x_1, y_1), (y_2, y_2)$ とすると、2 接線の方程式はそれぞれ

$$Ax_1x + By_1y = 1, \quad Ax_2x + By_2y = 1$$

である。この接線はどちらも (a, b) を通るから

$$Ax_1a + By_1b = 1, \quad Ax_2a + By_2b = 1$$

となる。これは、2 接点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ が直線 $Aax + Bby = 1$ 上にあることを意味している。■

これより、直線 AB の方程式は $ax + by = 1$ である。 $\vec{OQ} = k\vec{OP}$ より $Q(ka, kb)$ であるから、Q が直線 $ax + by = 1$ 上にあるように k の値を決めることで Q を求めてもよい。

(2)

🔗 Q の座標で P の座標を表し、それを P の座標が満たす式に代入して Q の軌跡を求める。

🔗 (1) の計算で得られた $OQ \cdot OP = 1$ を活用する。

• $Q(x, y)$ とする。P(a, b) は円 $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ 上の点であるから $(a - 3)^2 + b^2 = 1 \dots \textcircled{1}$

• Q は半直線 OP 上にあり、(1) の (*) より、 $OQ \cdot OP = 1$ である。よって $Q \neq O$ で、 \vec{OP} は \vec{OQ} と同じ向きで長さが $\frac{1}{OQ}$ である。従って、 $\vec{OP} = \frac{1}{OQ} \vec{OQ}$

• 以上より $(x, y) \neq (0, 0)$ で、 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ である。

従って、 $a = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad b = \frac{y}{x^2 + y^2}$ となるから、これを $\textcircled{1}$ に代入する。

• $\left(\frac{x}{x^2 + y^2} - 3\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2 = 1$ の両辺に $(x^2 + y^2)^2$ を掛けると $\{x - 3(x^2 + y^2)\}^2 + y^2 = (x^2 + y^2)^2$
展開すると、 $x^2 + y^2 - 6x(x^2 + y^2) + 9(x^2 + y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2$ この両辺を $x^2 + y^2 (\neq 0)$ で割ると、

$$1 - 6x + 9(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 \text{ となり, } x^2 + y^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$$

$$\text{これを平方完成すると, } \left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{64}$$

- これは $(x, y) \neq (0, 0)$ も満たす。以上より求めるべき軌跡は, $\boxed{\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{64}}$