

(問題 2)

k を実数とすると、2つの直線

$$\ell: (k+1)x + (1-k)y + k - 1 = 0$$

$$m: kx + y + 1 = 0$$

について、次の問に答えよ。

- (1) k の値によらず ℓ はある定点を通ることを示せ。
- (2) ℓ と m のなす角のうち鋭角を θ とするとき、 $\cos \theta$ を求めよ。
- (3) k がすべての実数をとるとき、 ℓ と m の交点の軌跡を求めよ。

(島根大・医)

(1)

 k の値によらず定点を通ることを示すために、式を k についてまとめる。

• ℓ の方程式 $(k+1)x + (1-k)y + k - 1 = 0$ を変形して、 k についてまとめると

$$k(x - y + 1) + x + y - 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

 k の値によらず $\textcircled{1}$ がつねに成り立つような (x, y) を求めよ。つまり $x - y + 1 = 0$ かつ $x + y - 1 = 0$ となる (x, y) が求まればよい。

• $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$ を解くと $(x, y) = (0, 1)$ となる。よって、 k によらず定点 $\boxed{(0, 1)}$ を通る。

(2)

 xy 平面上の直線 $ax + by + c = 0$ は、必ず $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と直交する。つまり $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ はこの直線の法線ベクトルである。

 法線ベクトル同士のなす角を φ とすると、 $\theta = \varphi$ または $\theta = \pi - \varphi$ のいずれかであるから、 $\cos \theta = |\cos \varphi|$ である。

 $\cos \varphi$ を求めるには、ベクトルの内積を利用する。 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$ より、 $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

- $l \perp \begin{pmatrix} k+1 \\ 1-k \end{pmatrix}$, $m \perp \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$ である。 $\begin{pmatrix} k+1 \\ 1-k \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$ のなす角を φ とすると

$$\cos \varphi = \frac{\begin{pmatrix} k+1 \\ 1-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} k+1 \\ 1-k \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} \right|} \text{ より } \cos \varphi = \frac{k^2+1}{\sqrt{2}(k^2+1)} \text{ つまり } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- $\cos \varphi \geq 0$ であるから, $\cos \theta = \cos \varphi$ で, $\cos \theta = \cos \varphi = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ である。

(3)

 (1)(2) の誘導を利用して, 図形的に解くこともできるが, ここでは「どんな点が軌跡に入るのか?」を考えることで解く。

 交点の軌跡を W とおく。点 (x_0, y_0) が W に含まれるための条件を考える。

- 交点の軌跡を W とおくと

$$\begin{aligned} & (x_0, y_0) \in W \\ \iff & \begin{cases} (k_0+1)x + (1-k_0)y + k_0 - 1 = 0 \\ k_0x + y + 1 = 0 \end{cases} \text{ がともに } (x_0, y_0) \text{ を通るような実数 } k_0 \text{ が存在する} \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} (k_0+1)x_0 + (1-k_0)y_0 + k_0 - 1 = 0 \\ k_0x_0 + y_0 + 1 = 0 \end{cases} \text{ となるような実数 } k_0 \text{ が存在する}$$

\iff k についての 2 つの方程式

$$\begin{cases} (k+1)x_0 + (1-k)y_0 + k - 1 = 0 \\ kx_0 + y_0 + 1 = 0 \end{cases} \text{ が共通の解 } k = k_0 \text{ をもつ}$$

- よって $(x, y) \in W \iff \ell, m$ を k についての方程式と見るとき共通の解をもつ
- k についての方程式らしく k についてまとめて ℓ, m の式を書き直すと

$$(x-y+1)k = -x-y+1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$xk = -y-1 \quad \dots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ が共通解をもつような (x, y) の全体が求めるべき軌跡 W である。

②の k の係数 x が0でなければ、②は解くことができるから、 $x=0$ か否かで場合を分けて考える。

Case 1. $x \neq 0$ のとき

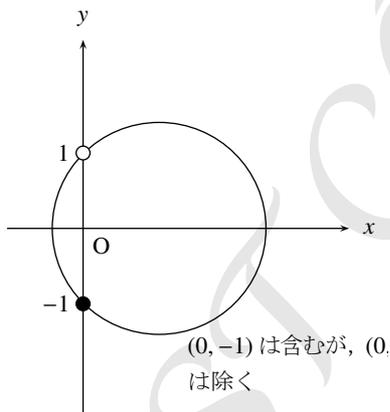
- ②の解は $x = \frac{-y-1}{x}$ であるから、これが①の解にもなればよいので代入すると、
 $(x-y+1)\frac{-y-1}{x} = -x-y+1$ となる。分母を払って変形すると
 $x^2 - 2x + y^2 - 1 = 0$ つまり $(x-1)^2 + y^2 = 2$ ($x \neq 0$)となる。

Case 2. $x = 0$ のとき

- このとき①②はそれぞれ $\begin{cases} (-y+1)k = -y+1 & \dots \textcircled{3} \\ 0 \cdot k = -y-1 & \dots \textcircled{4} \end{cases}$ となる。
- ④が解を持つのは $y = -1$ のときで、このとき③④は $\begin{cases} 2k = 2 & \dots \textcircled{3} \\ 0 \cdot k = 0 & \dots \textcircled{4} \end{cases}$ となる。
- これは確かに、共通解 $k = 1$ を持つ。よって $(0, -1) \in W$

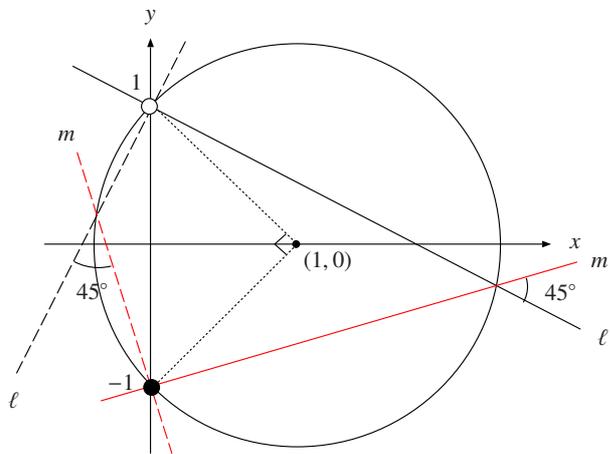
Case 1より、円 $(x-1)^2 + y^2 = 2$ 上で $x=0$ となる2点 $(0, 1)$ 、 $(0, -1)$ は除かれるが、Case 2より $(0, -1)$ は W に含まれる。しかし、 $(0, 1)$ は含まれない。

- 以上、Case 1とCase 2をあわせると、軌跡は図のようになる。



[注] (3)は、(1)(2)の誘導を利用して図形的に考えることもできる。

m は k によらず定点 $(0, -1)$ を通る傾き k の直線である (従って, k をどのような実数にとっても y 軸に平行にはなれない)。また (1) (2) より ℓ は $(0, 1)$ を通り, m と 45° の角をなす直線である。従って, 交点は $(0, 1)$, $(0, -1)$ を結ぶ円弧上の円周角が 45° または 135° となる点の軌跡であるから, $(1, 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周上にある。■



m は y 軸に平行にはなれないので, $(0, 1)$ は現れない。

