

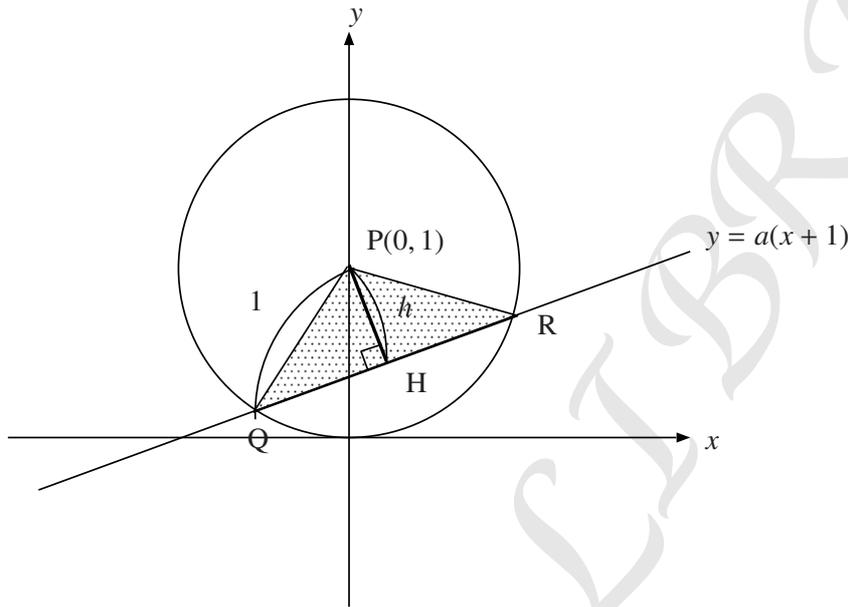
## (問題 1)

座標平面において、点  $P(0, 1)$  を中心とする半径 1 の円を  $C$  とする。 $a$  を  $0 < a < 1$  を満たす実数とし、直線  $y = a(x + 1)$  と  $C$  の交点を  $Q, R$  とする。

(1)  $\triangle PQR$  の面積  $S(a)$  を求めよ。

(2)  $a$  が  $0 < a < 1$  の範囲を動くとき、 $S(a)$  が最大となる  $a$  を求めよ。

(東京大・理系)



(1)

円が直線から切り取る弦の長さは、「中心と直線の距離」および「円の半径」を用いて表すことができる。

- $P$  から直線  $y = a(x + 1)$  … ① へ下ろした垂線の足を  $H$  とし、 $PH = h$  とおく。
- 円の半径は 1 であるから、三平方の定理より  $QH = RH = \sqrt{1 - h^2}$  である。  
従って  $QR = 2\sqrt{1 - h^2}$  となる。
- $\triangle PQR = \frac{1}{2} \times QR \times h = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{1 - h^2} \times h = h\sqrt{1 - h^2}$  … ②

点と直線の距離の公式を利用して、 $h$  を  $a$  で表して ② へ代入すればよい。このとき、 $0 < a < 1$  より  $|a - 1| = 1 - a$  となることに注意。

•  $P(0, 1)$  と直線 ① の距離  $h$  は,  $h = \frac{|a-1|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}$

これを ② に代入して

$$S(a) = \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}} \sqrt{1 - \left(\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2} = \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}} \sqrt{\frac{2a}{a^2+1}} = \boxed{\frac{(1-a)\sqrt{2a}}{a^2+1}}$$

(2)

△PQR =  $h\sqrt{1-h^2} = \sqrt{h^2(1-h^2)}$  であるから,  $h^2 = u$  とおくと,  $\triangle PQR = \sqrt{u(1-u)}$  となる。

2次関数  $u(1-u)$  は  $u = \frac{1}{2}$  のとき最大となる。今の場合, 実際に  $u = \frac{1}{2}$  となる  $a$  の値の存在を確認すればそのとき  $S(a)$  は最大となる。

• (1) より,  $h = PH = \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}$  ... ①とおくと,  $S(a) = h\sqrt{1-h^2} = \sqrt{h^2(1-h^2)}$  である。

•  $u = h^2$  とおくと,  $u \geq 0$  で  $S(a) = \sqrt{u(1-u)}$  となる。従って, 2次関数  $v = u(1-u)$  のグラフを考えれば,  $u = \frac{1}{2}$  となることがあれば, このとき  $v = u(1-u)$  は最大値をとる。

•  $u = \frac{1}{2}$  となるのは  $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$  のときである。よって ① より

$$\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるから

$$2(1-a)^2 = a^2 + 1 \quad \text{つまり} \quad a^2 - 4a + 1 = 0$$

これを解いて,  $a = 2 \pm \sqrt{3}$  となる。しかし  $0 < a < 1$  であるから  $a = 2 - \sqrt{3}$ 。

• 以上より,  $\boxed{a = 2 - \sqrt{3}}$  のとき,  $u = \frac{1}{2}$  となるから, このとき  $S(a)$  は最大となる。