

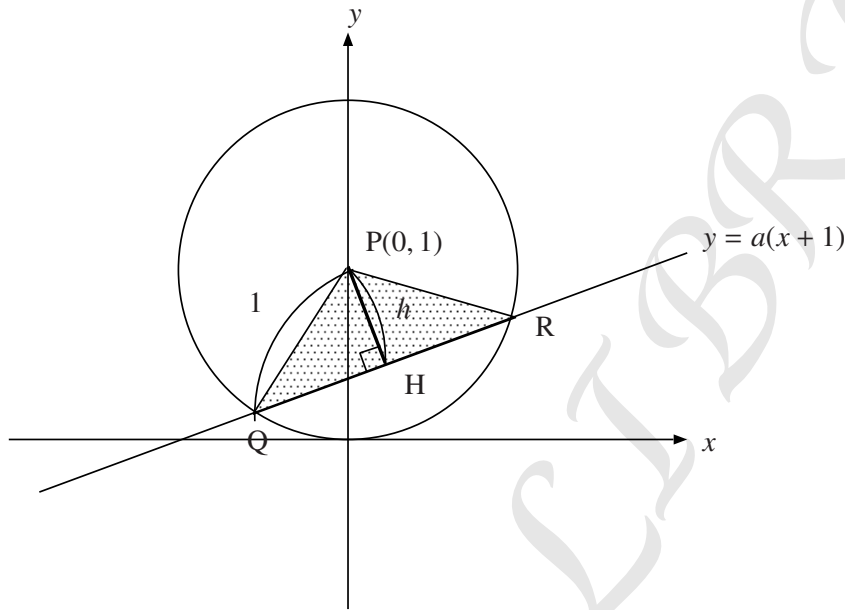
(問題 1)

座標平面において、点 $P(0, 1)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。 a を $0 < a < 1$ を満たす実数とし、直線 $y = a(x + 1)$ と C の交点を Q, R とする。

(1) $\triangle PQR$ の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき、 $S(a)$ が最大となる a を求めよ。

(東京大・理系)



(1)

円が直線から切り取る弦の長さは、「中心と直線の距離」および「円の半径」を用いて表すことができる。

- P から直線 $y = a(x + 1)$ …①へ下ろした垂線の足を H とし、 $PH = h$ とおく。
- 円の半径は 1 であるから、三平方の定理より $QH = RH = \sqrt{1 - h^2}$ である。
従って $QR = 2\sqrt{1 - h^2}$ となる。
- $\triangle PQR = \frac{1}{2} \times QR \times h = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{1 - h^2} \times h = h\sqrt{1 - h^2}$ …②

点と直線の距離の公式を利用して、 h を a で表して ② へ代入すればよい。このとき、 $0 < a < 1$ より $|a - 1| = 1 - a$ となることに注意。

• $P(0, 1)$ と直線 ① の距離 h は, $h = \frac{|a-1|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}$

これを ② に代入して

$$S(a) = \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}} \sqrt{1 - \left(\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2} = \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}} \sqrt{\frac{2a}{a^2+1}} = \boxed{\frac{(1-a)\sqrt{2a}}{a^2+1}}$$

(2)

△PQR = $h\sqrt{1-h^2} = \sqrt{h^2(1-h^2)}$ であるから, $h^2 = u$ とおくと, $\triangle PQR = \sqrt{u(1-u)}$ となる。

2次関数 $u(1-u)$ は $u = \frac{1}{2}$ のとき最大となる。今の場合, 実際に $u = \frac{1}{2}$ となる a の値の存在を確認すればそのとき $S(a)$ は最大となる。

• (1) より, $h = PH = \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}$... ①とおくと, $S(a) = h\sqrt{1-h^2} = \sqrt{h^2(1-h^2)}$ である。

• $u = h^2$ とおくと, $u \geq 0$ で $S(a) = \sqrt{u(1-u)}$ となる。従って, 2次関数 $v = u(1-u)$ のグラフを考えれば, $u = \frac{1}{2}$ となることがあれば, このとき $v = u(1-u)$ は最大値をとる。

• $u = \frac{1}{2}$ となるのは $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときである。よって ① より

$$\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるから

$$2(1-a)^2 = a^2 + 1 \quad \text{つまり} \quad a^2 - 4a + 1 = 0$$

これを解いて, $a = 2 \pm \sqrt{3}$ となる。しかし $0 < a < 1$ であるから $a = 2 - \sqrt{3}$ 。

• 以上より, $\boxed{a = 2 - \sqrt{3}}$ のとき, $u = \frac{1}{2}$ となるから, このとき $S(a)$ は最大となる。