

(問題 4)

空間内の 4 点 A, B, C, D が

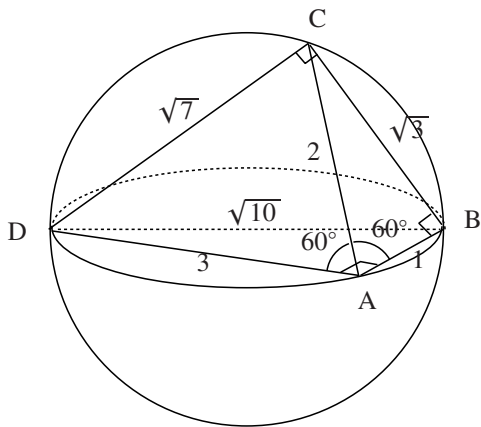
$$AB = 1, \quad AC = 2, \quad AD = 3$$

$$\angle BAC = \angle CAD = 60^\circ, \quad \angle DAB = 90^\circ$$

を満たしている。この 4 点から等距離にある点 E とする。線分 AE の長さを求めよ。

(大阪大・理系)


図形的考察による解法



 4 点 A, B, C, D から等距離にある点 E とは, A, B, C, D を通る球面の中心である。従って, AE の長さとは, この球の半径のことである。

 一般に,  $\angle APB = 90^\circ$  となる P は, AB を直径とする球面上にあることを利用する。

- $\angle DAB = 90^\circ$  であるから, A は BD を直径とする球面上にある。

 もし,  $\angle BCD = 90^\circ$  が言えれば, C も BD を直径とする球面上にあり, 4 点 A, B, C, D は BD を直径とする球面上にあると分かる。従って, その半径も分かる。

  $\angle BCD = 90^\circ$  を示すために,  $BC^2 + CD^2 = BD^2$  となることを言う。

- $\triangle ABC$  において,  $AB = 1, \quad AC = 2, \quad \angle BAC = 60^\circ$  であるから  $\angle ABC = 90^\circ$  で  $BC = \sqrt{3} \dots \textcircled{1}$  である。
- $\triangle ABD$  において  $\angle DAB = 90^\circ$  で,  $AB = 1, \quad AD = 3$  であるから, 三平方の定理を用いると  $BD = \sqrt{10} \dots \textcircled{2}$  である。

- $\triangle ADC$  において余弦定理を用いる。  $\angle CAD = 60^\circ$ ,  $AC = 2$ ,  $AD = 3$  であるから、余弦定理より  $CD^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ$  となり、  $CD = \sqrt{7} \cdots \textcircled{3}$  である。
- $\textcircled{1}$   $\textcircled{2}$   $\textcircled{3}$  より、  $BC^2 + CD^2 = BD^2$  であるから、  $\angle BCD = 90^\circ$  となり、  $C$  は  $BD$  を直径とする球面上にある。

 4点  $A, B, C, D$  は  $BD$  を直径とする球面上にある。求めるべきは、この球面の半径であった。

- 4点  $A, B, C, D$  は  $BD$  を直径とする球面上にある。この球面の半径は、  $\frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{10}}{2}$  である。

- $E$  はこの球面の中心であるから、  $AE =$  (球の半径)  $= \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$


[注] ベクトルの計算による解法

  $A$  を始点とするベクトルで考える。

  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$  は 1 次独立である。

実際、もし 1 次従属とすると、  $A, B, C, D$  は同一平面上にあることとなるが、これは  $\angle BAC = \angle CAD = 60^\circ$  かつ  $\angle DAB = 90^\circ$  となることに反して矛盾。

- $\vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}, \vec{AD} = \vec{d}, \vec{AE} = \vec{e}$  とおくと、仮定から  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  は 1 次独立であるから、  $\vec{e} = x\vec{b} + y\vec{c} + z\vec{d} \cdots \textcircled{1}$  と書ける。

 与えられた条件から、  $x, y, z$  を求め  $|\vec{e}|$  を計算する。

- 仮定から、

$$|\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 2, |\vec{d}| = 3. \vec{b} \cdot \vec{c} = 1, \vec{b} \cdot \vec{d} = 0, \vec{c} \cdot \vec{d} = 3$$

- $E$  が 4 点  $A, B, C, D$  から等距離にあることより、  $|\vec{e}| = |\vec{e} - \vec{b}| = |\vec{e} - \vec{c}| = |\vec{e} - \vec{d}|$  であるから、辺々を 2 乗して考えると

$$-2\vec{e} \cdot \vec{b} + 1 = 0, \quad -2\vec{e} \cdot \vec{c} + 4 = 0, \quad -2\vec{d} \cdot \vec{e} + 9 = 0$$

- よって、 $\vec{e} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ ,  $\vec{e} \cdot \vec{c} = 2$ ,  $\vec{e} \cdot \vec{d} = \frac{9}{2}$
- ①と  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  の内積をそれぞれとると  $\frac{1}{2} = x+y$ ,  $2 = x+4y+3z$ ,  $\frac{9}{2} = 3y+9z$  である。  
これを解くと  $x=z=\frac{1}{2}$ ,  $y=0$  となり  $\vec{e} = \frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}$  である。
- $\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$  に注意すると、 $|\vec{e}|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{d}|^2) = \frac{10}{4}$  となるので  $AE = |\vec{e}| = \frac{\sqrt{10}}{2}$  である。