

(問題 3)

$\triangle ABC$ の外心 (外接円の中心) O が三角形の内部にあるとし, α, β, γ は

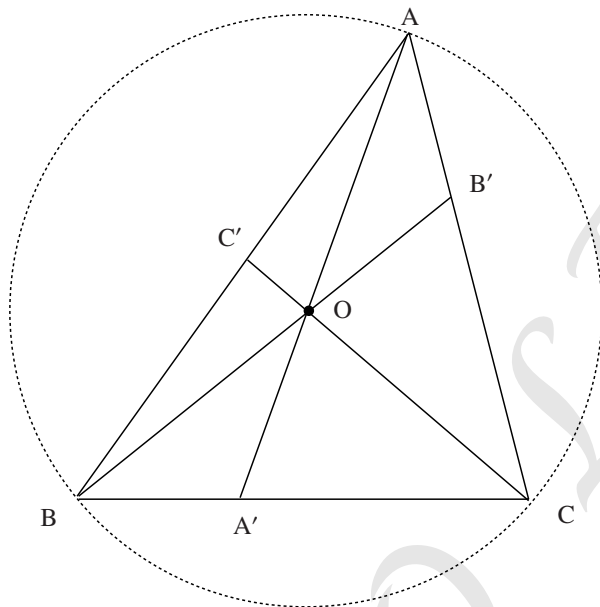
$$\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC} = \vec{0}$$

を満たす正の数であるとする。また, 直線 OA, OB, OC がそれぞれ辺 BC, CA, AB と交わる点を A', B', C' とする。

(1) $\vec{OA}, \alpha, \beta, \gamma$ を用いて \vec{OA}' を表せ。

(2) $\triangle A'B'C'$ の外心が O に一致すれば $\alpha = \beta = \gamma$ であることを示せ。

(名古屋大・理系)



(1)

A' は BC の内分点であるから, 内分点の公式の形を作って考える。


• $\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC} = \vec{0}$ より

$$\vec{OA} = -\frac{\beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC}}{\alpha} = -\frac{\beta + \gamma}{\alpha} \cdot \frac{\beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC}}{\beta + \gamma} \dots \textcircled{1}$$

• BC を $\gamma : \beta$ に内分する点を P とすると, $\vec{OP} = \frac{\beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC}}{\beta + \gamma} \dots \textcircled{2}$ である。

- ① ② より, $\vec{OA} = -\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\vec{OP}$ つまり $\vec{OP} = -\frac{\alpha}{\beta+\gamma}\vec{OA}$ となる。
- $\vec{OP} = -\frac{\alpha}{\beta+\gamma}\vec{OA}$ であるから, P は直線 OA 上にある。
- P は BC の内分点で直線 OA 上にあるから, 直線 OA と辺 BC の交点に他ならない。よって $P = A'$ となり $\vec{OA'} = -\frac{\alpha}{\beta+\gamma}\vec{OA}$ である。

(2)

 O が $\triangle A'B'C'$ の外心となるための必要十分条件は, $OA' = OB' = OC'$ となることである。そこで, まず OA', OB', OC' を計算する。

- A, B, C および α, β, γ の役割を入れ換えて (1) と同様の議論をすれば $\vec{OA'} = -\frac{\alpha}{\beta+\gamma}\vec{OA}$, $\vec{OB'} = -\frac{\beta}{\gamma+\alpha}\vec{OB}$, $\vec{OC'} = -\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\vec{OC}$... ①となる。
- $\triangle A'B'C'$ の外心が O であるから, $OA' = OB' = OC'$ となる。よって ① より $\frac{\alpha}{\beta+\gamma} \cdot OA = \frac{\beta}{\gamma+\alpha} \cdot OB = \frac{\gamma}{\alpha+\beta} \cdot OC$... ②である。
- もともと O は $\triangle ABC$ の外心であるから, $OA = OB = OC$ 。従って ② より $\frac{\alpha}{\beta+\gamma} = \frac{\beta}{\gamma+\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$... ③となる。

 ③ から $\alpha = \beta = \gamma$ を導くために, ③ の式の値を k おく。

- α, β, γ はすべて正の数であるから, ③ = k とおくと, $k > 0$ で $\alpha = k(\beta+\gamma)$... ④, $\beta = k(\gamma+\alpha)$, ... ⑤, $\gamma = k(\alpha+\beta)$... ⑥
- ④-⑤より, $\alpha - \beta = k(\beta - \alpha)$ となり $(k+1)(\beta - \alpha) = 0$ である。ここで $k > 0$ であるから $k+1 \neq 0$ 。よって, $\alpha = \beta$ となる。
- 同様に, ⑤-⑥より $\beta = \gamma$ を得る。
- 以上より, $\alpha = \beta = \gamma$ となり示された。