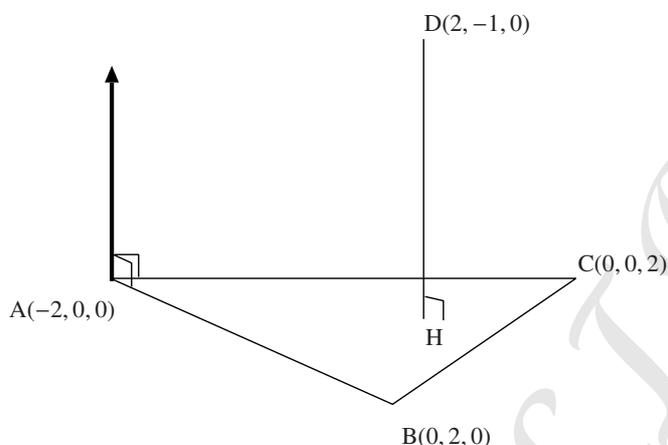


(問題 2)

空間内に 4 点 $A(-2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 2)$, $D(2, -1, 0)$ がある。3 点 A , B , C を含む平面を T とする。

- (1) 点 D から平面 T に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。
- (2) 平面 T において、3 点 A , B , C を通る円 S の中心の座標と半径を求めよ。
- (3) 点 P が円 S の周上を動くとき、線分 DP の長さが最小となる P の座標を求めよ。

(大阪市大)



(1)

平面は、通る一点と法線ベクトルで決まるので、まず平面 T の法線ベクトルを求める。

\vec{AB} , \vec{AC} の両方に直交するベクトルが T の法線ベクトルである。

$$\left| \begin{array}{l} \bullet \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ であるから, } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ の両方に直交するベクトルが法線ベクトルである。} \end{array} \right.$$

成分の 0 に着目すると、たとえ c がどんな実数であってもつねに $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ となる。これが更に

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ にも直交するように c を決める。

- たとえ c がどんな実数であってもつねに $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ となる。

そこで、更に $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ とすると、 $1+c=0$ つまり $c=-1$ となる。従って $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の両方に直交するベクトルで、これが平面 T の法線ベクトルである。

- \overrightarrow{DH} も平面 T に垂直であるから、 $\overrightarrow{DH} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と書ける。

そうすると $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdots \textcircled{1}$ となる。

$\overrightarrow{AH} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より k の値を決める。

- $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ であるから、

$$\overrightarrow{AH} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ より } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = 0 \text{ つまり}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ 従って } 5 + 3k = 0 \text{ となり } k = -\frac{5}{3} \text{ である。}$$

- $k = -\frac{5}{3}$ を $\textcircled{1}$ に代入する。

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ となり, } \mathbf{H} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

(2)

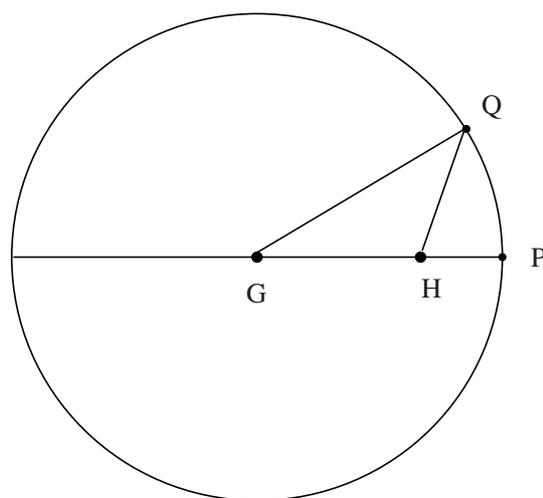
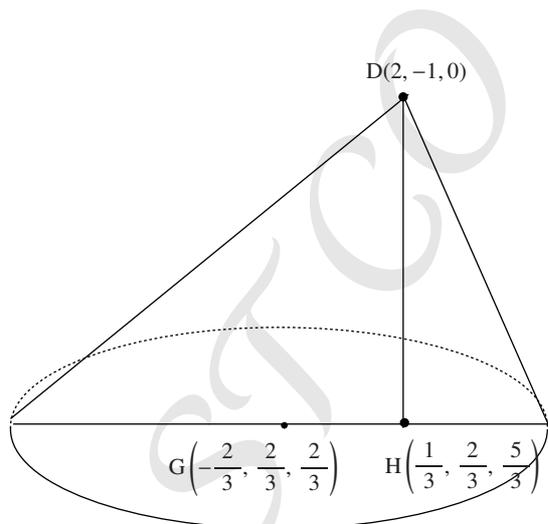
 $\triangle ABC$ は特殊な三角形であることに気づかないと面倒。

- $AB = BC = CA = 2\sqrt{2}$ であるから、 $\triangle ABC$ は正三角形である。
- 円 S は正三角形 $\triangle ABC$ の外接円である。正三角形の外心と重心は一致する。従って、 S の中心は $\triangle ABC$ の重心と一致し、 $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(3)

 まず、 H が円の内部にあることを確認する。

- S の中心を G とおく。 $G\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$
- $\vec{GH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから $GH = \sqrt{2}$ である。また、 $\vec{AG} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから、円 S の半径は $AG = \frac{2}{3}\sqrt{6}$ である。
- $\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{6} = \sqrt{2} - \sqrt{\frac{8}{3}} < 0$ であるから、 $GH < (\text{円の半径})$ となり H は円 S の内部にある。



 H が円の内部にあるので、 G と H を結ぶ半直線の延長上に P が来るとき、 DP は最小となることを示す。

- 三平方の定理より、 $DP^2 = DH^2 + HP^2$ であるが、 DH は一定であるから、 HP が最小のとき DP も最小となる。
- 半直線 GH と円周との交点を P とし、 Q を円周上の他の点とする。 PQ が円の直径となるときは確かに $HQ > HP$ であるから、 PQ は円の直径ではないとする。

$$\begin{aligned} HQ + GH &> GQ && \lll \triangle GHQ \text{ において、2 辺の和は他の 1 辺より大きい} \\ &= GP && \lll \text{ 円の半径は等しいので } GQ = GP \\ &= GH + HP \end{aligned}$$

となるから、 $HQ > HP$ である。

 円の中心 G から \overrightarrow{GH} の向きに、半径の距離だけ進んだ点を P とするとき DP は最小となる。

- 円 S の中心 $G\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ から $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の向きに距離 $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ (半径) だけ進んだ点を P とするとき DP が最小となる。

- $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と同じ向きで長さ 1 のベクトルは、 \overrightarrow{GH} を自分の長さ $\sqrt{2}$ で割って、 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

$$\bullet \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \frac{2}{3}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{GH} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{3} \\ 1 \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

- 以上より、 $\boxed{P\left(\frac{-2 + 2\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2 + 2\sqrt{3}}{3}\right)}$