

## (問題 1)

O を原点とする座標平面上の 4 点  $P_1, P_2, P_3, P_4$  で、条件

$$\vec{OP}_{n-1} + \vec{OP}_{n+1} = \frac{3}{2}\vec{OP}_n \quad (n = 2, 3)$$

を満たすものを考える。このとき、以下の間に答えよ。

- (1)  $P_1, P_2$  が曲線  $xy = 1$  上にあるとき、 $P_3$  はこの曲線上にはないことを示せ。
- (2)  $P_1, P_2, P_3$  が円周  $x^2 + y^2 = 1$  上にあるとき、 $P_4$  もこの円周上にあることを示せ。

(東京大・理科)

## (1)

  $P_3$  と  $P_1, P_2$  の関係を調べ、 $P_3$  の座標を  $P_1, P_2$  の  $x$  座標で表す。

• 仮定より  $\vec{OP}_1 + \vec{OP}_3 = \frac{3}{2}\vec{OP}_2$  であるから  $\vec{OP}_3 = \frac{3}{2}\vec{OP}_2 - \vec{OP}_1$  である。

•  $P_1\left(s, \frac{1}{s}\right), P_2\left(t, \frac{1}{t}\right)$  とおくと、 $P_3\left(\frac{3}{2}t - s, \frac{3}{2t} - \frac{1}{s}\right)$  である。

  $P_3$  が曲線  $xy = 1$  上にあると仮定すると、 $P_3\left(\frac{3}{2}t - s, \frac{3}{2t} - \frac{1}{s}\right)$  が  $xy = 1$  を満たすことになり、

$\left(\frac{3}{2}t - s\right)\left(\frac{3}{2t} - \frac{1}{s}\right) = 1$  となる。従って、これを満たすような実数  $s, t$  は存在し得ないことを言えばよい。

•  $P_3\left(\frac{3}{2}t - s, \frac{3}{2t} - \frac{1}{s}\right)$  が曲線  $xy = 1$  上にあると仮定すると、 $\left(\frac{3}{2}t - s\right)\left(\frac{3}{2t} - \frac{1}{s}\right) = 1$  である。これを展開すると  $\frac{t}{s} + \frac{s}{t} = \frac{3}{2}$  …①となる。

•  $x = \frac{t}{s}$  とおくと  $x$  は実数である。そして ① より  $x + \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$  つまり  $x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0$  となる。

• しかし、 $x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0$  の判別式は  $D = \frac{9}{4} - 4 < 0$  となり、これを満たす実数  $x$  は存在しないので矛盾である。よって、 $P_3$  は曲線  $xy = 1$  上にはない。

## (2)

✎ まず、 $P_4$  を  $P_1, P_2$  で表す。

- 仮定より  $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OP_2} \cdots \textcircled{1}$ ,  $\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_4} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OP_3} \cdots \textcircled{2}$  である。
- $\textcircled{1}$  より  $\overrightarrow{OP_3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \cdots \textcircled{3}$  であるから、  
これを  $\textcircled{2}$  に代入すると  $\overrightarrow{OP_4} = \frac{5}{4}\overrightarrow{OP_2} - \frac{3}{2}\overrightarrow{OP_1} \cdots \textcircled{4}$

✎ 点  $Q$  が円周  $x^2 + y^2 = 1$  上にあるための必要十分条件は  $|\overrightarrow{OQ}| = 1$  であることを利用する。

$\textcircled{4}$  より  $|\overrightarrow{OP_4}|$  を計算するのだが、そのためには  $\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}$  の値が必要。  
これは  $\textcircled{3}$  より求まる。

- $P_1, P_2, P_3$  が円周  $x^2 + y^2 = 1$  上にあるので、 $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}| = |\overrightarrow{OP_3}| = 1$
- $\textcircled{3}$  より  $1 = |\overrightarrow{OP_3}|^2 = \left| \frac{3}{2}\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \right|^2$  であるから、右辺を展開すると  
$$1 = |\overrightarrow{OP_3}|^2 = \frac{9}{4}|\overrightarrow{OP_2}|^2 - 3\overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_1} + |\overrightarrow{OP_1}|^2 = \frac{9}{4} - 3\overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_1} + 1$$
  
よって、 $\overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \frac{3}{4} \cdots \textcircled{5}$  となる。

✎  $|\overrightarrow{OP_4}| = 1$  を示せば  $P_4$  も円周  $x^2 + y^2 = 1$  上にあると分かる。

- $\textcircled{4}$  より  $|\overrightarrow{OP_4}|^2 = \left| \frac{5}{4}\overrightarrow{OP_2} - \frac{3}{2}\overrightarrow{OP_1} \right|^2 = \frac{25}{16}|\overrightarrow{OP_2}|^2 - \frac{15}{4}\overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_1} + \frac{9}{4}|\overrightarrow{OP_1}|^2$  である。
- ここで  $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}| = 1$  であり、また  $\textcircled{5}$  より  $\overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \frac{3}{4}$  である。  
これらを代入すると  $|\overrightarrow{OP_4}|^2 = \frac{25}{16} - \frac{15}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = \frac{25 - 45 + 36}{16} = 1$  となる。
- 以上で  $|\overrightarrow{OP_4}| = 1$  となったから、 $P_4$  もまた円周  $x^2 + y^2 = 1$  上にある。

[注] 座標を使って計算してもよい。

- $P_1(s, t)$ ,  $P_2(u, v)$  とおくと、 $P_3\left(\frac{3}{2}u - s, \frac{3}{2}v - t\right)$ ,  $P_4\left(\frac{5}{4}u - \frac{3}{2}s, \frac{5}{4}v - \frac{3}{2}t\right)$  となる。
- $P_1, P_2$  が円周  $x^2 + y^2 = 1$  上にあることより、 $s^2 + t^2 = 1$ ,  $u^2 + v^2 = 1$

- $P_3$  が円周  $x^2 + y^2 = 1$  上にあることより,  $us + vt = \frac{3}{4}$  を得る。
- これらを用いて  $OP_4^2 = \left(\frac{5}{4}u - \frac{3}{2}s\right)^2 + \left(\frac{5}{4}v - \frac{3}{2}t\right)^2$  を計算すると,  $OP_4 = 1$  を得る。

STCO LIBRARY