

(問題 5)

実数 x の小数部分を、 $0 \leq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 y のこととし、これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して、無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように定める。

(i) $a_1 = \langle a \rangle$

(ii)
$$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = 0 \end{cases}$$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき、数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\frac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

(3) a が有理数であるとする。 a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \frac{p}{q}$ と表すとき、 q 以上のすべての自然数 n に対して、 $a_n = 0$ であることを示せ。

(東京大・理系)

(1)

$\triangleleft \langle a \rangle$ は a の小数部分である。従って、 a の整数部分つまり a を超えない最大の整数を $[a]$ とすると、 $\langle a \rangle = a - [a]$ である。

$\triangleleft [\sqrt{2}] = 1$ であるから、 $\langle \sqrt{2} \rangle = \sqrt{2} - 1$

• $a_1 = \langle \sqrt{2} \rangle = \sqrt{2} - 1$

• $a_2 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right\rangle = \langle \sqrt{2} + 1 \rangle$ であるが、 $\sqrt{2} + 1$ の整数部分は 2 であるから、

$a_2 = \langle \sqrt{2} + 1 \rangle = (\sqrt{2} + 1) - [\sqrt{2} + 1] = \sqrt{2} + 1 - 2 = \sqrt{2} - 1$

\triangleleft 以下、この操作を繰り返すと $a_n = \sqrt{2} - 1$ となるが、これを n についての数学的帰納法で示す。

• $n \geq 1$ のとき、 $a_n = \sqrt{2} - 1$ となることを n に関する数学的帰納法で示す。

• $n = 1$ のときは、上に見たように $a_1 = \sqrt{2} - 1$ であるから正しい。

• $n = k$ のとき正しいと仮定して $n = k + 1$ のときに考える。

帰納法の仮定から $a_k = \sqrt{2} - 1$ であるから、

$a_{k+1} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rangle = \langle \sqrt{2}+1 \rangle = (\sqrt{2}+1) - [\sqrt{2}+1] = (\sqrt{2}+1) - 2 = \sqrt{2}-1$ であるから、 $a_{k+1} = \sqrt{2}-1$ となり、 $n = k+1$ のときも正しくなる。

- 以上で、帰納法により $\boxed{a_n = \sqrt{2}-1 \ (n \geq 1)}$ が示された。

(2)

任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるなら、最低限 $a_1 = a$ 、 $a_2 = a$ でなければならない。このことから a の可能性を限定する。

- $a_1 = a$ より、 $\langle a \rangle = a$ である。従って $0 \leq a < 1$ でなければならないが、仮定から $a \geq \frac{1}{3}$ であるから $\frac{1}{3} \leq a < 1 \dots \textcircled{1}$ となる。

$a_2 = \left\langle \frac{1}{a_1} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle = \frac{1}{a} - \left[\frac{1}{a} \right]$ であるから $\frac{1}{a}$ の整数部分 $\left[\frac{1}{a} \right]$ を考える。

$\textcircled{1}$ も考えて、 $a = \frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$ 、 $a = \frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{2} < a < 1$ のそれぞれの場合に分けて考える。それぞれの場合で、 $\frac{1}{a}$ の整数部分が異なるので場合を分ける。

Case 1. $a = \frac{1}{3}$ のとき

- このとき $\frac{1}{a} = 3$ であるから $a_2 = \left\langle \frac{1}{a_1} \right\rangle = 0$ となり $a_2 \neq a$ でダメ。

Case 2. $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$ のとき

- このとき $2 < \frac{1}{a} < 3$ であるから、 $\left[\frac{1}{a} \right] = 2$ となり、 $a_2 = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle = \frac{1}{a} - 2$ である。
- $a_2 = a$ となるのは $\frac{1}{a} - 2 = a$ つまり $a^2 + 2a - 1 = 0$ のときであるから、 $a = -1 \pm \sqrt{2}$ となるが、Case 2 の仮定より $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$ であるから、 $a = \sqrt{2} - 1$ である。

次に、 $a = \sqrt{2} - 1$ のとき、つねに $a_n = a \ (n \geq 1)$ となることを確認する。

- (1) より $a = \sqrt{2} - 1$ のとき、つねに $a_n = a \ (n \geq 1)$ であることが分かっている。

Case 3. $a = \frac{1}{2}$ のとき

- このとき $\frac{1}{a} = 2$ であるから, $a_2 = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle = 0 \neq a$ となり不適。

Case 4. $\frac{1}{2} < a < 1$ のとき

- このとき $1 < \frac{1}{a} < 2$ であるから, $\left[\frac{1}{a} \right] = 1$ となり $\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle = \frac{1}{a} - 1$ である。

- $a_2 = a$ となるのは, $\frac{1}{a} - 1 = a$ つまり $a^2 + a - 1 = 0$ となるときであるから $a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

となるが, Case 4 の仮定より $\frac{1}{2} < a < 1$ であるから, $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ となる。

\Rightarrow 次に, $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ のとき, つねに $a_n = a$ ($n \geq 1$) となることを確認する。

- $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ のとき, $\frac{1}{2} < a < 1$ であるから, $\left[\frac{1}{a} \right] = 1$ である。そして $\frac{1}{a} - 1 = a$ であるから, $\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle = \frac{1}{a} - \left[\frac{1}{a} \right] = a$ となる。

従って, $a_m = a$ なら $a_{m+1} = \left\langle \frac{1}{a_m} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle = a$ となるから, 帰納的に, $a_n = a$ ($n \geq 1$) である。

- 以上より, 求めるべき a は, $a = \sqrt{2} - 1, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

(3)

\Rightarrow まず, 有理数 $\frac{p}{q}$ の小数部分は, p を q で割ったときの余りを r とすると $\frac{r}{q}$ であることを示す。その後, これを繰り返し用いて $a_n = 0$ ($n \geq q$) を示す。

- p を q で割って, 商を m_1 , 余りを r_1 とすると $p = qm_1 + r_1$ ($0 \leq r_1 < q$) であるから, $\frac{p}{q} = m_1 + \frac{r_1}{q}$ となる。ここで $0 \leq \frac{r_1}{q} < 1$ であるから $\frac{r_1}{q}$ が $\frac{p}{q}$ の小数部分であり, $a_1 = \langle a \rangle = \frac{r_1}{q}$ となる。

- $r_1 \neq 0$ なら, $a_2 = \left\langle \frac{1}{a_1} \right\rangle = \left\langle \frac{q}{r_1} \right\rangle$

- q を r_1 で割って、商を m_2 、余りを r_2 ($0 \leq r_2 < r_1$) とすると、上と同様に $\frac{q}{r_1}$ の小数部分は $\frac{r_2}{r_1}$ となり、 $a_2 = \left\langle \frac{1}{a_1} \right\rangle = \frac{r_2}{r_1}$ ($0 \leq r_2 < r_1 < q$) である。 ◀◀ $q = r_0$ とおいておく。

- 以下同様の操作を繰り返す。

もし、 $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, \dots, r_q \neq 0$ だとすると、 $0 < r_q < r_{q-1} < \dots < r_2 < r_1 < q$ となるが、これは 0 と q の間に異なる q 個の整数が存在することを示しているから矛盾である。

従って、 $r_j = 0$ ($1 \leq j \leq q$) となる j があるので、このような j のうち最小のものを i とすると、 $r_i = 0, r_{i-1} \neq 0$ であって、 $a_i = \frac{r_i}{r_{i-1}} = 0$ となる。

よって、 $0 = a_i = a_{i+1} = \dots = a_q = a_{q+1} = \dots$ となり、 $n \geq q$ のときつねに $a_n = 0$ であるから示された。