

## (問題 4)

$n$  を自然数とする。平面上の曲線  $C_n : y = x^2 - n$  と  $x$  軸が囲む領域内にあり、 $x$  座標と  $y$  座標がともに整数であるような点の総数を  $a_n$  とおく。但し、曲線  $C$  上の点および  $x$  軸上の点も含むとする。 $n^{\frac{1}{2}}$  を超えない最大の整数を  $m_n$  とおくと、次の間に答えよ。

(1)  $a_n$  を  $n$  と  $m_n$  で表せ。

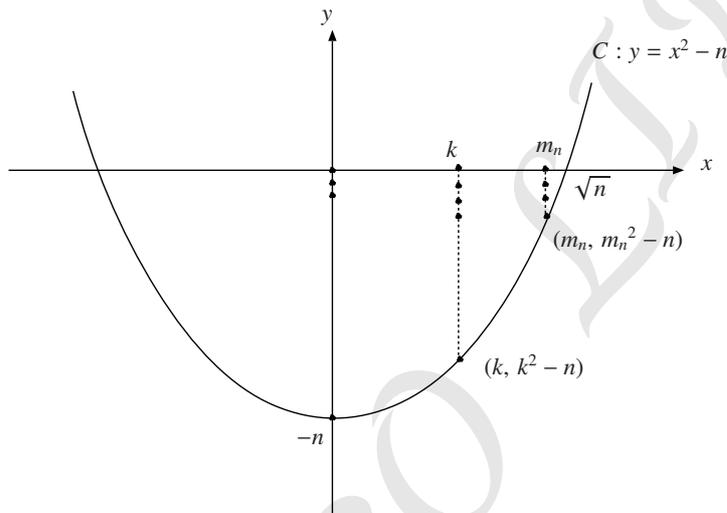
(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{\frac{3}{2}}}$  を求めよ。

(東北大・理)

(1)

  $x$  座標も  $y$  座標もともに整数である点を格子点と呼ぶ。

 考えている領域  $D$  は  $y$  軸に関して対称である。



  $x = 0$  のときと  $x \neq 0$  のときに分けて格子点の個数を数える。

- $x = 0$  となる格子点は、 $(0, 0), (0, -1), \dots, (0, -n)$  の  $n + 1$  個ある。
- $x = \pm k$  ( $1 \leq k \leq m_n$ ) なる格子点は、 $(k, 0), (k, -1), \dots, (k, k^2 - n)$  の  $n + 1 - k^2$  個ある。
- 対称性に注意すると

$$a_n = n + 1 + 2 \sum_{k=1}^{m_n} (n + 1 - k^2)$$

$k$  についての和なので、 $n+1$  は定数扱いであることに注意して

$$= n+1 + 2(n+1)m_n - 2 \sum_{k=1}^{m_n} k^2$$

平方和の公式を用いると

$$= (n+1)(2m_n+1) - 2 \cdot \frac{m_n(m_n+1)(2m_n+1)}{6}$$

となるから、約分して

$$a_n = (n+1)(2m_n+1) - \frac{m_n(m_n+1)(2m_n+1)}{3}$$

(2)

④ (1) より  $a_n = (n+1)(2m_n+1) - \frac{m_n(m_n+1)(2m_n+1)}{3}$  である。

$$\frac{a_n}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2m_n+1}{n^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{m_n+1}{n^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2m_n+1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

となるので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}}$  を求める必要がある。

④  $m_n$  が  $n^{\frac{1}{2}}$  を超えない最大の整数であることから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}}$  を求める。はさみうちの原理を利用する。

•  $m_n$  の定義から、 $m_n \leq \sqrt{n} < m_n + 1$  であるから、 $m_n$  を主体に書き直すと、

$$\sqrt{n} - 1 < m_n \leq \sqrt{n} \text{ となる。この辺々を } n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \text{ で割ると、} 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}} \leq 1 \text{ となる。}$$

• ここで  $n \rightarrow \infty$  とすると、 $1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 1$  であるから、

$$\text{はさみうちの原理より } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}} = 1 \text{ となる。}$$

•  $a_n = (n+1)(2m_n+1) - \frac{m_n(m_n+1)(2m_n+1)}{3}$  であるから

$$\frac{a_n}{n^{\frac{3}{2}}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 \cdot \frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right) \left(2 \cdot \frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)$$

- ここで,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$  であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{\frac{3}{2}}} = 2 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{3}} \quad \text{となる。}$$

STCO LIBRARY