

(問題 4)

n を自然数とする。平面上の曲線 $C_n : y = x^2 - n$ と x 軸が囲む領域内にあり、 x 座標と y 座標がともに整数であるような点の総数を a_n とおく。但し、曲線 C 上の点および x 軸上の点も含むとする。 $n^{\frac{1}{2}}$ を超えない最大の整数を m_n とおくと、次の間に答えよ。


(1) a_n を n と m_n で表せ。

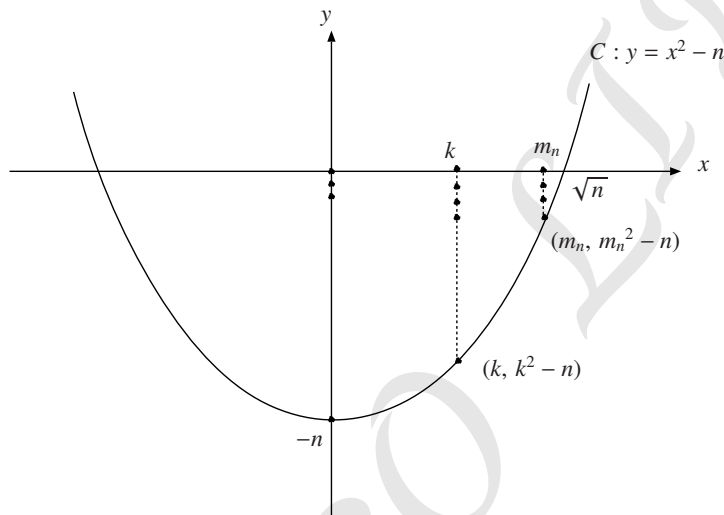
(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{\frac{3}{2}}}$ を求めよ。

(東北大・理)

(1)

 x 座標も y 座標もともに整数である点を格子点と呼ぶ。

 考えている領域 D は y 軸に関して対称である。



 $x = 0$ のときと $x \neq 0$ のときに分けて格子点の個数を数える。

- $x = 0$ となる格子点は、 $(0, 0), (0, -1), \dots, (0, -n)$ の $n + 1$ 個ある。
- $x = \pm k$ ($1 \leq k \leq m_n$) なる格子点は、 $(k, 0), (k, -1), \dots, (k, k^2 - n)$ の $n + 1 - k^2$ 個ある。
- 対称性に注意すると

$$a_n = n + 1 + 2 \sum_{k=1}^{m_n} (n + 1 - k^2)$$

k についての和なので、 $n+1$ は定数扱いであることに注意して

$$= n+1 + 2(n+1)m_n - 2 \sum_{k=1}^{m_n} k^2$$

平方和の公式を用いると

$$= (n+1)(2m_n+1) - 2 \cdot \frac{m_n(m_n+1)(2m_n+1)}{6}$$

となるから、約分して

$$a_n = (n+1)(2m_n+1) - \frac{m_n(m_n+1)(2m_n+1)}{3}$$

(2)

④ (1) より $a_n = (n+1)(2m_n+1) - \frac{m_n(m_n+1)(2m_n+1)}{3}$ である。

$$\frac{a_n}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2m_n+1}{n^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{m_n+1}{n^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2m_n+1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

となるので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}}$ を求める必要がある。

④ m_n が $n^{\frac{1}{2}}$ を超えない最大の整数であることから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}}$ を求める。はさみうちの原理を利用する。

• m_n の定義から、 $m_n \leq \sqrt{n} < m_n + 1$ であるから、 m_n を主体に書き直すと、

$$\sqrt{n} - 1 < m_n \leq \sqrt{n} \text{ となる。この辺々を } n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \text{ で割ると、} 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}} \leq 1 \text{ となる。}$$

• ここで $n \rightarrow \infty$ とすると、 $1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 1$ であるから、

$$\text{はさみうちの原理より } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}} = 1 \text{ となる。}$$

• $a_n = (n+1)(2m_n+1) - \frac{m_n(m_n+1)(2m_n+1)}{3}$ であるから

$$\frac{a_n}{n^{\frac{3}{2}}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 \cdot \frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right) \left(2 \cdot \frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)$$

- ここで, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n^{\frac{1}{2}}} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$ であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{\frac{3}{2}}} = 2 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{3}} \text{ となる。}$$

STCO LIBRARY