

(問題 3)

b は $|b| \geq 3$ を満たす整数とする。2 次方程式 $x^2 + bx + 1 = 0$ の解を α, β とする。

- (1) 0 以上のすべての整数 n に対して $\alpha^n + \beta^n$ は整数であることを示せ。
- (2) $|\alpha| > |\beta|$ とする。 α^n から最も近い整数と α^n との差を d_n とする。極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ を求めよ。

(東北大・理)

(1)

 n に関する数学的帰納法で示す。

- (i) $\alpha^k + \beta^k$ が整数と仮定しても $\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}$ が整数であることが導けない。
- (ii) $\alpha^k + \beta^k, \alpha^{k+1} + \beta^{k+1}$ がともに整数と仮定して $\alpha^{k+2} + \beta^{k+2}$ が整数であることを導く。
- (iii) 最初の場合も、 $n = 0$ だけでなく、 $n = 1$ の場合も正しいことを示さないと帰納法が完成しない。
- (iv) $n = 0$ のとき、もし α, β が 0 だと 0^0 の値は定義されないので $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ であることも確認しておく。

- n に関する数学的帰納法で $\alpha^n + \beta^n$ が整数であることを示す。
- α, β は 2 次方程式 $x^2 + bx + 1 = 0$ の解であるから、解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -b, \alpha\beta = 1 \cdots \textcircled{1}$$
 である。 $\alpha\beta = 1 \neq 0$ より $\alpha \neq 0$ かつ $\beta \neq 0$ である。
- $n = 0$ のとき、 $\alpha^0 + \beta^0 = 1 + 1 = 2$ で整数となるから、 $n = 0$ のとき正しい。
- $n = 1$ のとき、 $\textcircled{1}$ より $\alpha + \beta = -b$ であるが、題意より b は整数であるから $n = 1$ のときは正しい。
- $n = k, n = k + 1$ のとき正しいと仮定して $n = k + 2$ のときに考える。

$$\begin{aligned} & \alpha^{k+2} + \beta^{k+2} \\ &= (\alpha^{k+1} + \beta^{k+1})(\alpha + \beta) - \alpha^{k+1}\beta - \alpha\beta^{k+1} \\ &= (\alpha^{k+1} + \beta^{k+1})(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^k + \beta^k) \end{aligned}$$

ここへ $\textcircled{1}$ を代入すると

$$= -b(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}) - (\alpha^k + \beta^k)$$

- 題意から b は整数であり、また帰納法の仮定から $\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}, \alpha^k + \beta^k$ も整数であるか

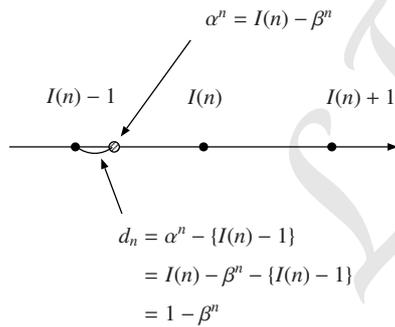
ら、 $\alpha^{k+2} + \beta^{k+2}$ も整数となり $n = k+2$ のときも正しくなる。
 以上で、帰納法により示された。

(2)

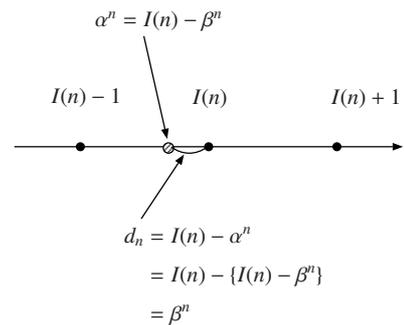
 $\alpha^n + \beta^n$ が整数である。 α^n に最も近い整数を考えるので、まず $-1 < \beta^n < 1$ であることに注意する。

- $\alpha\beta = 1$ であるから $|\alpha||\beta| = 1$ となり $|\alpha| = \frac{1}{|\beta|}$ 。これを $|\alpha| > |\beta|$ に代入すると、 $\frac{1}{|\beta|} > |\beta|$ となり $|\beta|^2 < 1$ つまり $0 \neq |\beta| < 1$ となる。従って、 $-1 < \beta^n < 1$ かつ $\beta \neq 0$ である。
- $\alpha^n + \beta^n = I(n)$ とおくと $I(n)$ は整数であり、 $-1 < \beta^n < 1$ である。 $\alpha^n = I(n) - \beta^n$ であるから、次の図より α^n に最も近い整数は、 $I(n) - 1, I(n), I(n) + 1$ のいずれかである。

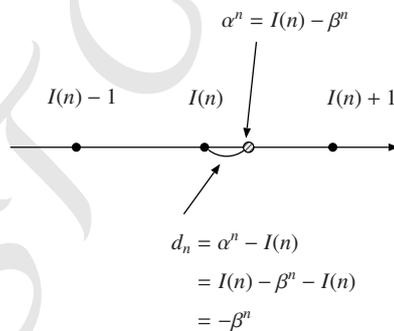
$\frac{1}{2} \leq \beta^n < 1$ のとき



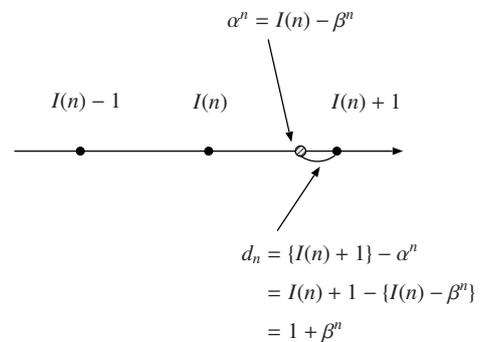
$0 < \beta^n \leq \frac{1}{2}$ のとき



$-\frac{1}{2} \leq \beta^n < 0$ のとき



$-1 < \beta^n \leq -\frac{1}{2}$ のとき



④ $|\beta^n|$ と $\frac{1}{2}$ の大小を調べるために、 β の値を評価する。 $|b| \geq 3$ であるから、 $b \geq 3$ のときと $b \leq -3$ のときに場合を分けて考える。

Case 1. $b \geq 3$ のとき

- α, β は $x^2 + bx + 1$ の 2 解で、 $|\alpha| > |\beta|$ であった。
- $y = f(x) = x^2 + bx + 1$ のグラフを考える。軸は $x = -\frac{b}{2}$ ($\leq -\frac{3}{2}$)。

そして $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5-2b}{4} < 0$, $f(0) = 1 > 0$ となるから、 $y = f(x)$ のグラフは $-\frac{1}{2} < x < 0$ において x 軸と交わり $-\frac{1}{2} < \beta < 0$ である。従って、 $-\frac{1}{2} < \beta^n < 0$ または $0 < \beta^n < \frac{1}{2}$ となる。

- このとき、上の図より $d_n = -\beta^n$ または $d_n = \beta^n$ であるが、 $|\beta| < \frac{1}{2}$ であるから

$$0 \leq |d_n| = |-\beta^n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |d_n| = 0$ である。従って、 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$

Case 2. $b \leq -3$ のとき

- $y = f(x) = x^2 + bx + 1$ のグラフを考える。軸は $x = -\frac{b}{2}$ ($\geq \frac{3}{2}$)。

そして $f(0) = 1 > 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5+2b}{4} < 0$ となるから、 $y = f(x)$ のグラフは $0 < x < \frac{1}{2}$ において x 軸と交わり $0 < \beta < \frac{1}{2}$ である。従って、 $0 < \beta^n < \frac{1}{2}$ となる。

- このとき、上の図より $d_n = \beta^n$ であるが、 $|\beta| < \frac{1}{2}$ であるから

$$0 \leq d_n = \beta^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となり $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$

- 以上より、いずれにせよ $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \boxed{0}$