

## (問題 2)

数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とする。数列  $\{a_n\}$  が

$$a_2 = 3, \quad nS_n = (n-1)(2a_n + 2 - n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たしているとき、次の問に答えよ。

(1) 数列  $\{a_n\}$  は  $na_{n+1} - 2(n+1)a_n = n+2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を満たすことを証明せよ。

(2)  $b_n = \frac{1}{n}(a_n + 1)$  で与えられる数列  $\{b_n\}$  の一般項  $b_n$  を求めよ。

(3)  $\sum_{k=1}^n (2a_k + 1)$  を  $n$  の式で表せ。

(鹿児島大・理系)

## (1)

 和を含む関係式は番号をずらして引き、 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$  を利用する。そのために、まず問題文の式から  $S_n$  を  $a_n$  で表す。

•  $nS_n = (n-1)(2a_n + 2 - n)$  より  $S_n = \frac{n-1}{n}(2a_n + 2 - n) \dots \textcircled{1}$  である。

•  $\textcircled{1}$  より  $S_{n+1} = \frac{n}{n+1}(2a_{n+1} + 1 - n) \dots \textcircled{2}$  である。

•  $\textcircled{2} - \textcircled{1}$  より

$$S_{n+1} - S_n = \frac{n}{n+1}(2a_{n+1} + 1 - n) - \frac{n-1}{n}(2a_n + 2 - n)$$

左辺に  $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$  を代入すると

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+1}(2a_{n+1} + 1 - n) - \frac{n-1}{n}(2a_n + 2 - n)$$

よって  $a_{n+1}$ ,  $a_n$  についてまとめると

$$\frac{n-1}{n+1}a_{n+1} - \frac{2(n-1)}{n}a_n = \frac{n(n-1)}{n+1} + \frac{(n-1)(n-2)}{n}$$

従って、右辺を通分すると次を得る。

$$\frac{n-1}{n+1}a_{n+1} - \frac{2(n-1)}{n}a_n = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \dots \textcircled{3}$$

③の両辺に  $\frac{n(n+1)}{n-1}$  を掛けたいのだが、 $n=1$  のときこの分母は0となるので、 $n=1$  の場合は別扱いする。

- $n \geq 2$  のときは ③ の両辺に  $\frac{n(n+1)}{n-1}$  を掛けると  $na_{n+1} - 2(n+1)a_n = n+2 \cdots$  ④となり示された。

題意から  $a_2 = 3$  と分かっている。

$n=1$  のときも ④ が成り立つことを確認するために  $a_1$  の値を求める。

そのために ① において  $n=1$  とし、 $a_1 = S_1$  を利用する。

- ① において  $n=1$  とすると、 $S_1 = 0$  となるが、 $S_1 = a_1$  であるから  $a_1 = 0$  また、仮定から  $a_2 = 3$  である。よって

$$1 \cdot a_2 - 2 \cdot (1+1)a_1 = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 0 = 3 = 1 + 2$$

となるので ④ は  $n=1$  のときも正しい。

- 以上で  $n \geq 1$  のとき ④ が成立することが証明された。

(2)

$b_n = \frac{1}{n}(a_n + 1)$  とおくので  $a_n = nb_n - 1$  である。これを (1) の結果に代入すれば  $\{b_n\}$  の漸化式を得る。

- $b_n = \frac{1}{n}(a_n + 1)$  より  $a_n = nb_n - 1$  であるからこれを (1) の結果に代入すると

$$n\{(n+1)b_{n+1} - 1\} - 2(n+1)(nb_n - 1) = n+2$$

展開して整理すると

$$n(n+1)b_{n+1} - 2n(n+1)b_n = 0$$

となるから両辺を  $n(n+1)$  で割ると

$$b_{n+1} = 2b_n$$

となり  $b_n$  は公比 2 の等比数列である。

- (1) の計算より  $a_1 = 0$  であるから  $b_1 = a_1 + 1 = 1$  となる。
- $b_n$  は公比 2, 初項 1 の等比数列であるから,  $b_n = 2^{n-1}$

(3)

 まず, (2) の結果を用いて  $2a_k + 1$  を求める。

- (2) の結果より  $2^{n-1} = \frac{1}{n}(a_n + 1)$  であるから,  $a_n = n2^{n-1} - 1$  である。
- $$S = \sum_{k=1}^n (2a_k + 1) = \sum_{k=1}^n \{2 \cdot (k2^{k-1} - 1) + 1\} = \sum_{k=1}^n (2 \cdot k2^{k-1} - 1) = 2 \sum_{k=1}^n k2^{k-1} - n$$

を計算すればよい。
- $T = \sum_{k=1}^n k2^{k-1}$  とおくと,  $S = 2T - n \cdots \textcircled{1}$  である。

  $T = \sum_{k=1}^n k2^{k-1}$  を求めるには

- (i) 等比型数列の和であるから, 「公比」を掛けてずらして引く
- (ii) 階差型の和に直す
- (iii)  $x \neq 1$  のとき  $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$  であるからこれを  $x$  で微分するなどの方法があるが, ここでは (ii) の方法で計算してみる。

- $x \neq 1$  のとき

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

であるから, この両辺を  $x$  で微分すると

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1) \cdot 1}{(x-1)^2}$$

- ここで  $x = 2$  とすると

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + (n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = (n+1)2^n - (2^{n+1} - 1)$$

右辺は  $(n+1)2^n - (2^{n+1} - 1) = (n+1)2^n - 2 \cdot 2^n + 1 = (n-1)2^n + 1$  となるから

$$\sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

- これを ① に代入して

$$S = 2\{(n-1)2^n + 1\} - n = \boxed{(n-1)2^{n+1} - n + 2}$$

[注] 等比数列型の和 として求める。

☞  $T = \sum_{k=1}^n k2^{k-1}$  は「等比数列型の和」であるから「公比 (にあたるもの)」を掛けてずらして引いて求めてもよい。

- $T = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^{n-1}$

この両辺に 2 を掛けると

$$2T = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$$

辺々を引くと

$$\begin{aligned} -T &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} - n2^n \\ &= \frac{2^n - 1}{2 - 1} - n2^n \\ &= -(n-1)2^n - 1 \end{aligned}$$

となるので  $T = (n-1)2^n + 1$  である。

[注] 階差数列型の和 に直して考える。

- ☞ (i)  $f(k) = (ak+b)2^{k-1}$  が  $f(k+1) - f(k) = k2^{k-1}$  を満たすように定数  $a, b$  を決める。
- (ii) そうすると

$$\sum_{k=1}^n k2^{k-1} = \sum_{k=1}^n \{f(k+1) - f(k)\} = \{f(2) - f(1)\} + \{f(3) - f(2)\} + \dots + \{f(n+1) - f(n)\} = f(n+1) - f(1)$$

と和が求まる。

- $f(k) = (ak + b)2^{k-1}$  が  $f(k+1) - f(k) = k2^{k-1}$  を満たすように定数  $a, b$  を決める。

- $f(k+1) - f(k) = \{a(k+1) + b\}2^k - (ak + b)2^{k-1}$

$2^{k-1}$  でくくってまとめると

$$f(k+1) - f(k) = (ak + 2a + b)2^{k-1}$$

これが  $k2^{k-1}$  と一致するように  $a, b$  を決めればよいので

$$a = 1, \quad 2a + b = 0$$

とすればよい。つまり  $a = 1, b = -2$  とすればよい。

- $f(k) = (k-2)2^{k-1}$  とおくと  $f(k+1) - f(k) = k2^{k-1}$  となる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k2^{k-1} &= \sum_{k=1}^n \{f(k+1) - f(k)\} \\ &= f(n+1) - f(1) \\ &= (n+1)2^n + 1 \end{aligned}$$

- 一般に、 $a_k = (k$  についての  $m$  次式)  $\times r^k$  のとき、 $f(k) = (k$  についての  $m$  次式)  $\times r^k$  で  $f(k+1) - f(k) = a_k$  となるものを探して階差型の和に直して計算してもよい。

**[例]**  $a_k = (k^2 + 5k + 5)2^k$  のとき  $f(k) = (k^2 + k + 1)2^k$  とおくと、 $f(k+1) - f(k) = a_k$  となる。従って

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k^2 + 5k + 5)2^k &= \sum_{k=1}^n \{f(k+1) - f(k)\} \\ &= f(n+1) - f(1) \\ &= \{(n+1)^2 + (n+1) + 1\}2^{n+1} - 6 \\ &= (n^2 + 3n + 3)2^{n+1} - 6 \end{aligned}$$