

(問題 2)

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_2 = 3, \quad nS_n = (n-1)(2a_n + 2 - n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たしているとき、次の問に答えよ。


(1) 数列 $\{a_n\}$ は $na_{n+1} - 2(n+1)a_n = n+2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たすことを証明せよ。

(2) $b_n = \frac{1}{n}(a_n + 1)$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ。

(3) $\sum_{k=1}^n (2a_k + 1)$ を n の式で表せ。

(鹿児島大・理系)

(1)

 和を含む関係式は番号をずらして引き、 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ を利用する。そのために、まず問題文の式から S_n を a_n で表す。

• $nS_n = (n-1)(2a_n + 2 - n)$ より $S_n = \frac{n-1}{n}(2a_n + 2 - n) \dots \textcircled{1}$ である。

• $\textcircled{1}$ より $S_{n+1} = \frac{n}{n+1}(2a_{n+1} + 1 - n) \dots \textcircled{2}$ である。

• $\textcircled{2} - \textcircled{1}$ より

$$S_{n+1} - S_n = \frac{n}{n+1}(2a_{n+1} + 1 - n) - \frac{n-1}{n}(2a_n + 2 - n)$$

左辺に $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ を代入すると

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+1}(2a_{n+1} + 1 - n) - \frac{n-1}{n}(2a_n + 2 - n)$$

よって a_{n+1} , a_n についてまとめると

$$\frac{n-1}{n+1}a_{n+1} - \frac{2(n-1)}{n}a_n = \frac{n(n-1)}{n+1} + \frac{(n-1)(n-2)}{n}$$

従って、右辺を通分すると次を得る。

$$\frac{n-1}{n+1}a_{n+1} - \frac{2(n-1)}{n}a_n = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \dots \textcircled{3}$$

③の両辺に $\frac{n(n+1)}{n-1}$ を掛けたいのだが、 $n=1$ のときこの分母は0となるので、 $n=1$ の場合は別扱いする。

- $n \geq 2$ のときは ③ の両辺に $\frac{n(n+1)}{n-1}$ を掛けると $na_{n+1} - 2(n+1)a_n = n+2 \cdots$ ④となり示された。

題意から $a_2 = 3$ と分かっている。

$n=1$ のときも ④ が成り立つことを確認するために a_1 の値を求める。

そのために ① において $n=1$ とし、 $a_1 = S_1$ を利用する。

- ① において $n=1$ とすると、 $S_1 = 0$ となるが、 $S_1 = a_1$ であるから $a_1 = 0$ また、仮定から $a_2 = 3$ である。よって

$$1 \cdot a_2 - 2 \cdot (1+1)a_1 = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 0 = 3 = 1 + 2$$

となるので ④ は $n=1$ のときも正しい。

- 以上で $n \geq 1$ のとき ④ が成立することが証明された。

(2)

$b_n = \frac{1}{n}(a_n + 1)$ とおくので $a_n = nb_n - 1$ である。これを (1) の結果に代入すれば $\{b_n\}$ の漸化式を得る。

- $b_n = \frac{1}{n}(a_n + 1)$ より $a_n = nb_n - 1$ であるからこれを (1) の結果に代入すると

$$n\{(n+1)b_{n+1} - 1\} - 2(n+1)(nb_n - 1) = n+2$$

展開して整理すると

$$n(n+1)b_{n+1} - 2n(n+1)b_n = 0$$

となるから両辺を $n(n+1)$ で割ると

$$b_{n+1} = 2b_n$$

となり b_n は公比 2 の等比数列である。


- (1) の計算より $a_1 = 0$ であるから $b_1 = a_1 + 1 = 1$ となる。
- b_n は公比 2, 初項 1 の等比数列であるから, $b_n = 2^{n-1}$

(3)

 まず, (2) の結果を用いて $2a_k + 1$ を求める。

- (2) の結果より $2^{n-1} = \frac{1}{n}(a_n + 1)$ であるから, $a_n = n2^{n-1} - 1$ である。
- $$S = \sum_{k=1}^n (2a_k + 1) = \sum_{k=1}^n \{2 \cdot (k2^{k-1} - 1) + 1\} = \sum_{k=1}^n (2 \cdot k2^{k-1} - 1) = 2 \sum_{k=1}^n k2^{k-1} - n$$

を計算すればよい。
- $T = \sum_{k=1}^n k2^{k-1}$ とおくと, $S = 2T - n \cdots \textcircled{1}$ である。

 $T = \sum_{k=1}^n k2^{k-1}$ を求めるには

- (i) 等比型数列の和であるから, 「公比」を掛けてずらして引く
- (ii) 階差型の和に直す
- (iii) $x \neq 1$ のとき $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ であるからこれを x で微分するなどの方法があるが, ここでは (ii) の方法で計算してみる。

- $x \neq 1$ のとき

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

であるから, この両辺を x で微分すると

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1) \cdot 1}{(x-1)^2}$$

- ここで $x = 2$ とすると

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + (n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = (n+1)2^n - (2^{n+1} - 1)$$

右辺は $(n+1)2^n - (2^{n+1} - 1) = (n+1)2^n - 2 \cdot 2^n + 1 = (n-1)2^n + 1$ となるから

$$\sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

- これを ① に代入して

$$S = 2\{(n-1)2^n + 1\} - n = \boxed{(n-1)2^{n+1} - n + 2}$$

[注] 等比数列型の和 として求める。

☞ $T = \sum_{k=1}^n k2^{k-1}$ は「等比数列型の和」であるから「公比 (にあたるもの)」を掛けてずらして引いて求めてもよい。

- $T = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^{n-1}$

この両辺に 2 を掛けると

$$2T = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$$

辺々を引くと

$$\begin{aligned} -T &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} - n2^n \\ &= \frac{2^n - 1}{2 - 1} - n2^n \\ &= -(n-1)2^n - 1 \end{aligned}$$

となるので $T = (n-1)2^n + 1$ である。

[注] 階差数列型の和 に直して考える。

- ☞ (i) $f(k) = (ak+b)2^{k-1}$ が $f(k+1) - f(k) = k2^{k-1}$ を満たすように定数 a, b を決める。
- (ii) そうすると

$$\sum_{k=1}^n k2^{k-1} = \sum_{k=1}^n \{f(k+1) - f(k)\} = \{f(2) - f(1)\} + \{f(3) - f(2)\} + \dots + \{f(n+1) - f(n)\} = f(n+1) - f(1)$$

と和が求まる。

- $f(k) = (ak + b)2^{k-1}$ が $f(k+1) - f(k) = k2^{k-1}$ を満たすように定数 a, b を決める。

- $f(k+1) - f(k) = \{a(k+1) + b\}2^k - (ak + b)2^{k-1}$

2^{k-1} でくくってまとめると

$$f(k+1) - f(k) = (ak + 2a + b)2^{k-1}$$

これが $k2^{k-1}$ と一致するように a, b を決めればよいので

$$a = 1, \quad 2a + b = 0$$

とすればよい。つまり $a = 1, b = -2$ とすればよい。

- $f(k) = (k-2)2^{k-1}$ とおくと $f(k+1) - f(k) = k2^{k-1}$ となる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k2^{k-1} &= \sum_{k=1}^n \{f(k+1) - f(k)\} \\ &= f(n+1) - f(1) \\ &= (n+1)2^n + 1 \end{aligned}$$

- 一般に、 $a_k = (k$ についての m 次式) $\times r^k$ のとき、 $f(k) = (k$ についての m 次式) $\times r^k$ で $f(k+1) - f(k) = a_k$ となるものを探して階差型の和に直して計算してもよい。

[例] $a_k = (k^2 + 5k + 5)2^k$ のとき $f(k) = (k^2 + k + 1)2^k$ とおくと、 $f(k+1) - f(k) = a_k$ となる。従って

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k^2 + 5k + 5)2^k &= \sum_{k=1}^n \{f(k+1) - f(k)\} \\ &= f(n+1) - f(1) \\ &= \{(n+1)^2 + (n+1) + 1\}2^{n+1} - 6 \\ &= (n^2 + 3n + 3)2^{n+1} - 6 \end{aligned}$$