

## (問題 1)

$n$  を自然数とし、1 または  $-1$  を  $2n$  個並べた数列  $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$  を考える。

例えば、 $n = 1$  のときは  $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$  の 4 通りがある。

(1)  $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_{2n})$  は整数であることを示せ。

(2)  $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_{2n})$  が 2 の倍数となるような数列  $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$  は全部で何通りあるか。

(愛媛大・理)

## (1)

  $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$  は 1 と  $-1$  を並べたものなので、1 の個数を  $k$  とおけば、 $-1$  の個数は  $2n - k$  となり和  $a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$  が計算できる。

•  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$  における 1 の個数を  $k$  とすると、

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} \\ &= 1 \times k + (-1) \times (2n - k) = 2k - 2n \\ &= 2(k - n) \end{aligned}$$

となるから  $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}) = k - n$  は整数である。

## (2) 漸化式を利用した解法

  $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_{2n})$  が偶数となる数列  $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$  の個数を  $f(n)$  とおき、 $f(n+1)$  と  $f(n)$  の関係を調べて漸化式を作る。

•  $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_{2n})$  が偶数となる数列  $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$  の個数を  $f(n)$  とおく。

•  $f(n+1)$  は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2}) \\ &= \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}) + \frac{1}{2}(a_{2n+1} + a_{2n+2}) \end{aligned}$$

が偶数となる数列  $(a_1, a_2, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2})$  の個数である。

- $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}) + \frac{1}{2}(a_{2n+1} + a_{2n+2})$  が偶数となるのは,
  - (i)  $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_{2n})$  が偶数かつ  $\frac{1}{2}(a_{2n+1} + a_{2n+2})$  も偶数
  - (ii)  $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_{2n})$  が奇数かつ  $\frac{1}{2}(a_{2n+1} + a_{2n+2})$  も奇数
 の 2 つの場合がある。

- $(a_{2n+1}, a_{2n+2})$  は  $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$  のいずれかであって,  
 $(a_{2n+1}, a_{2n+2}) = (1, -1), (-1, 1)$  の 2 つの場合は  $\frac{1}{2}(a_{2n+1} + a_{2n+2}) = 0$  で偶数。  
 $(a_{2n+1}, a_{2n+2}) = (1, 1), (-1, -1)$  の 2 つの場合は  $\frac{1}{2}(a_{2n+1} + a_{2n+2}) = 1$  または  $-1$  で奇数である。

- (i) のとき,  $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_{2n})$  が偶数となるような数列  $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$  の個数は  $f(n)$  であり, また  $\frac{1}{2}(a_{2n+1} + a_{2n+2})$  が偶数となる場合は 2 通りある。従って, この場合の  $(a_1, a_2, \dots, a_{2n+2})$  の個数は  $2f(n)$  である。

- $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$  は, 1 または  $-1$  を  $2n$  個並べたものであるから, 全部で  $2^{2n}$  個あることに注意する。

- (ii) のとき,  $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_{2n})$  が奇数となるような数列  $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$  の個数は, あらゆる数列の個数  $2^{2n}$  から偶数となるものの個数  $f(n)$  を引けば得られるから  $2^{2n} - f(n)$  となる。  
 一方,  $\frac{1}{2}(a_{2n+1} + a_{2n+2})$  が奇数となる場合は 2 通りある。従って, この場合の  $(a_1, a_2, \dots, a_{2n+2})$  の個数は  $2\{2^{2n} - f(n)\}$  である。

- (i) (ii) の場合をあわせて

$$f(n+1) = 2f(n) + 2\{2^{2n} - f(n)\} = 2^{2n+1}$$

となる。  $n \geq 1$  であるから,  $m = n + 1$  とおくと  $m \geq 2$  で  $f(m) = 2^{2m-1}$  となる。

- $m = 1$  のときも正しいか確かめる。

- $f(1) = 2$  であるから,  $f(m) = 2^{2m-1}$  は  $m = 1$  のときも正しい。

以上より,  $f(n) = \boxed{2^{2n-1}}$

[注] 2項展開を利用した解法

 直接, 個数を数える。

- $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}) = 2m$  とすると,  $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 4m$  となる。  
 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$  のうちの 1 の個数を  $k$  とおくと,  $-1$  は  $2n-k$  個であるから  $k - (2n-k) = 4m$  となり,  $k - n = 2m$  である。
- 従って,  $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n})$  が偶数となるのは  $k$  と  $n$  の偶奇が一致するときである。

  $n$  の偶奇で分けて考える。

- $n$  が偶数のとき  $k$  のとり得る値は,  $k = 0, 2, \cdots, 2n$  である。  
 $(a_1, a_2, \cdots, a_{2n})$  の個数は,  $2n$  個のうちのどの  $k$  個が 1 であるかを考えて  
 ${}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} \cdots \textcircled{1}$

  $\textcircled{1}$  の和を計算するために 2 項展開を利用する。

- $(x+1)^{2n} = {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1x + {}_{2n}C_2x^2 + {}_{2n}C_3x^3 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1}x^{2n-1} + {}_{2n}C_{2n}x^{2n} \cdots \textcircled{2}$   
 $\textcircled{1}$  で  $x = 1$  とすると  
 $2^{2n} = {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_3 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1} + {}_{2n}C_{2n} \cdots \textcircled{3}$   
 $\textcircled{1}$  で  $x = -1$  とすると  
 $0 = {}_{2n}C_0 - {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 - {}_{2n}C_3 + \cdots - {}_{2n}C_{2n-1} + {}_{2n}C_{2n} \cdots \textcircled{4}$   
 となる。  
 •  $\textcircled{1} + \textcircled{2}$  より  
 $2({}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n}) = 2^{2n}$

となるから

$${}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} = 2^{2n-1}$$

  $n$  が奇数のときに考える。

- $n$  が奇数のときは、 $k$  も奇数でなければならないので、 $n$  が奇数のとき、求めるべき個数は

$${}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_3 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1}$$

である。③-④より

$$2^{2n} = 2({}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_3 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1})$$

よって

$${}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_3 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1} = 2^{2n-1}$$

- 以上より、 $n$  の偶奇によらずつねに、 $2^{2n-1}$  個である。