

(問題 5)

(1) $3^n = k^3 + 1$ を満たす正の整数の組 (k, n) をすべて求めよ。

(2) $3^n = k^2 - 40$ を満たす正の整数の組 (k, n) をすべて求めよ。

(千葉大・医)

(1)

 右辺を積の形に直して、 3^n の正の約数は 3^m の形であることを利用する。

- $3^n = (k+1)(k^2 - k + 1)$ であるから、 $k+1 = 3^m$ つまり $k = 3^m - 1$ と書ける。
- これを代入すると、 $3^n = 3^m(3^{2m} - 3^{m+1} + 3)$ 従って $3^n = 3^{m+1}(3^{2m-1} - 3^m + 1)$ となるから、 $n \geq m+1$ で $3^{n-m-1} = 3^{2m-1} - 3^m + 1 \cdots \textcircled{1}$ である。
- $\textcircled{1}$ の右辺は 3 の倍数ではないので、左辺は $3^0 = 1$ となる。従って $n - m - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$ である。
- $\textcircled{1}$ は、 $3^{2m-1} - 3^m = 0$ つまり $3^m(3^{m-1} - 1) = 0$ となるが、 $3^m \neq 0$ であるから、 $3^{m-1} = 1$ となり $m = 1$ である。
- $\textcircled{2}$ で $m = 1$ とすると、 $n = 2$ となる。また、 $k = 3^m - 1 = 2$ である。

以上より、 $(k, n) = (2, 2)$

(2)

 可能性を絞り込むために、 $40 \equiv 0 \pmod{4}$ 、 $3 \equiv -1 \pmod{4}$ であることを利用する。

- $3^n = k^2 - 40$ を $\pmod{4}$ で考える。 $3 \equiv -1 \pmod{4}$ 、 $40 \equiv 0 \pmod{4}$ より、 $(-1)^n \equiv k^2 \pmod{4} \cdots \textcircled{1}$ を得る。これは、 $(-1)^n \pmod{4}$ が $\pmod{4}$ での平方数であることを意味している。
- $\pmod{4}$ での平方数を調べる。表より、 $\pmod{4}$ での平方数は $0, 1 \pmod{4}$ であるから $\textcircled{1}$ において n は偶数でなければならない。

$a \pmod{4}$	0	1	2	3
$a^2 \pmod{4}$	0	1	0	1

 $n = 2m$ とおくと $3^{2m} = k^2 - 40$ つまり $k^2 - 3^{2m} = 40$ となるから、左辺を積の形にして約数としての可能性を調べる。

• n は偶数であるから、 $n = 2m$ とおくと $3^{2m} = k^2 - 40$ となる。よって $k^2 - 3^{2m} = 40$ つまり $(k - 3^m)(k + 3^m) = 40 \cdots \textcircled{2}$ となる。

• $\textcircled{2}$ で $k + 3^m > 0$ であるから $k - 3^m > 0$ となり、 $0 < k - 3^m < k + 3^m$ である。これにも注意すると、 $\textcircled{2}$ より

	(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)
$k - 3^m$	1	2	4	5
$k + 3^m$	40	20	10	8

となる。

• (ア) (エ) のときは、 k, m が整数とならず不適である。(イ) のとき、 $k = 11, m = 2$ 。
 (ウ) のとき、 $k = 7, m = 1$ となる。 $n = 2m$ に注意すると、 $(k, n) = (11, 4), (7, 2)$