

(問題 4)

自然数 a, b, c が $3a = b^3, 5a = c^2$ を満たし、 d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d = 1$ に限るとする。

- (1) a は 3 と 5 で割り切れることを示せ。
- (2) a の素因数は 3 と 5 以外にないことを示せ。
- (3) a を求めよ。

(東京工大・後期)

(1)

$$\begin{cases} 3a = b^3 & \dots \textcircled{1} \\ 5a = c^2 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

 まず、 a は 3 で割り切れることを示す。

 素数の最も重要な性質は

「 p が素数のとき、 ab が p で割り切れるなら、 a または b の少なくとも一方は必ず p で割り切れる」ということ。

特に、 p が a^n ($n \geq 1$) を割り切るなら p は a を割り切る。

- ① より、3 は b^3 を割り切るが、3 は素数であるから 3 は b を割り切る。
- $b = 3x$ (x は整数) とおき、① に代入すると、 $3a = 27x^3$ つまり $a = 9x^3$ となるので a は 3 で割り切れる。

 a は 5 で割り切れることを示す。3 のときと全く同様に示される。

- ② より 5 は c^2 を割り切るが 5 は素数であるから 5 は c を割り切る。
- $c = 5y$ (y は整数) とおき、② に代入すると $5a = 25y^2$ つまり $a = 5y^2$ となるので a は 5 で割り切れる。
- 以上で、 a は 3 と 5 で割り切れることが示された。

(2)

 a が 3, 5 と異なる素因数を持つと仮定して矛盾を導く。

(1) の計算より, $a = 9x^3$, $a = 5y^2 \dots$ ① と書ける。

- a が 3, 5 とは異なる素因数 p を持つとする。
- $a = pA$ とおくと, ① より $pA = 9x^3$, $pA = 5y^2$ となる。従って p は $9x^3$, $5y^2$ を割り切るが, p は 3, 5 とは異なる素数であるから p は x^3 , y^2 を割り切る。従って p は x , y をともに割り切る。
- $x = p^m x_1$, $y = p^n y_1$ (x_1, y_1 はともに p と互い素) とする。
① より $9x^3 = 5y^2$ であるから, ここへ代入すると, $9(p^m x_1)^3 = 5(p^n y_1)^2$ となり, $9p^{3m} x_1^3 = 5p^{2n} y_1^2 \dots$ ② である。

☞ 矛盾を導くために, 素因数分解の一意性, つまり「素因数分解に現れる素数の種類と素数が現れる回数は一通りに決まる」ということを利用する。

- 素因数分解の一意性より, ② の両辺における p のべきを比べると, $3m = 2n \dots$ ③ となる。
- ③ において 2 と 3 は互いに素であるから, m は 2 で割り切れることになり, $m = 2\ell$ ($\ell \geq 1$) とおくと $3m = 6\ell$ は 6 の倍数になる。
- $a = 9x^3 = 9(p^{2\ell} x_1)^3 = 9p^{6\ell} x_1^3$ であるから, a が $p^{6\ell}$ で割り切れる。

☞ ここで, 「 d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d = 1$ に限る」という仮定を使う。

- a は $p^{6\ell} = (p^\ell)^6$ で割り切れるが, $p^\ell \neq 1$ である。これは「 d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d = 1$ に限る」という仮定に反して矛盾である。
- a が 3, 5 とは異なる素因数を持つと仮定すると矛盾が導かれるので, 背理法によって a の素因数は 3, 5 のみであることが示された。

(3)

(1) の計算より, $a = 9x^3$, $a = 5y^2 \dots$ ① と書ける。

☞ (2) より a の素因数は 3, 5 のみであることが分かったので, x, y の素因数は 3, 5 のみである。

- (2) より a の素因数は 3, 5 のみであるから, x, y の素因数も 3, 5 のみである。 s, t, u, v を 0 以上の整数とし, $x = 3^s \cdot 5^t$, $y = 3^u \cdot 5^v$ とすると ① より, $a = 3^{3s+2t} 5^{3t} = 3^{2u} \cdot 5^{2v+1}$ である。

- ここで、素因数分解の一意性を使うと、 $3s+2=2u$ 、 $3t=2v+1$ となるが、 a が 3^6 や 5^6 では割り切れないことより、 $3s+2=2u < 6$ 、 $3t=2v+1 < 6$ である。

従って、 $s < \frac{4}{3}$ 、 $2u = 3s+2$ 、 $t < 2$ 、 $3t = 2v+1$

- これを満たす0以上の整数の組 (s, t, u, v) を求めると $(s, t, u, v) = (0, 1, 1, 1)$ となり、 $a = 3^2 5^3 = \boxed{1125}$

STCO LIBRARY