

(問題 3)

次の条件を満たす組 (x, y, z) を考える。

条件 (A) : x, y, z は正の整数で, $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ および $x \leq y \leq z$ を満たす。

以下の間に答えよ。


- (1) 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) で, $y \leq 3$ となるものをすべて求めよ。
- (2) 組 (a, b, c) が条件 (A) を満たすとする。このとき, 組 (b, c, z) が条件 (A) を満たすような z が存在することを示せ。
- (3) 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) は, 無数に存在することを示せ。

(東京大・理系)

(1)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xyz \cdots \textcircled{1} \\ 0 < x \leq y \leq z \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

 大小関係を利用して, 可能性を限定する。

 まず, $y \leq 2$ のときは, (x, y, z) は存在しないことを示す。

- $y \leq 2$ のときは ① より

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz \leq 2xz \quad \text{従って} \quad x^2 - 2xz + z^2 + y^2 \leq 0$$

となり $(x-z)^2 + y^2 \leq 0$ であるが, $y \neq 0$ であるからこれは不合理である。

 $y = 3$ のときに考える。

- $y = 3$ のとき, ① ② は, $x^2 + z^2 + 9 = 3xz \cdots \textcircled{3}$ かつ $0 < x \leq 3 \leq z \cdots \textcircled{4}$ となる。

 まず, $x \leq 2$ のときは, (x, z) が存在しないことを示す。


- ③ で $x \leq 2$ とすると, $x^2 + z^2 + 9 = 3xz \leq 6z$ であるから $x^2 + z^2 - 6z + 9 \leq 0$ つまり $x^2 + (z-3)^2 \leq 0$ である。しかし, $x \neq 0$ であるからこれは矛盾である。よって $x = 3$ でなければならない。

- ③ ④ において $x = 3$ であるから, $z^2 - 9z + 18 = 0$ かつ $z \geq 3$ となる。つまり $(z-3)(z-6) = 0$ かつ $z \geq 3$ となる。従って, $z = 3$ または $z = 6$ である。
- 以上より, $(x, y, z) = (3, 3, 3), (3, 3, 6)$


(2)

 条件を満たす z を実際に作ってみせる。まず, (b, c, z) が条件 (A) を満たすとき, z の値を調べる。


- (a, b, c) が条件 (A) を満たすので,
 $a^2 + b^2 + c^2 = abc \cdots ①$ かつ $a \leq b \leq c \cdots ②$ である。
- (b, c, z) が条件 (A) を満たすなら,
 $b^2 + c^2 + z^2 = bcz \cdots ③$ かつ $b \leq c \leq z \cdots ④$ でなければならない。
- ①-③より
 $a^2 - z^2 = bc(a-z)$ 従って $(a-z)(a+z-bc) = 0$
 である。そこで $z = bc - a$ とおく。

 今度は, 逆に $z = bc - a$ のとき (b, c, z) は条件 (A) を満たすことを示す。

 まず $z = bc - a$ が正の整数であることを確認する。

 (1) で (x, y, z) が条件 (A) を満たすとき $y \geq 3$ であることを示した。今の場合, (a, b, c) が条件 (A) を満たすので $b \geq 3$ である。このことを使って $z = bc - a$ が正の整数であることを確認する。

- まず, (1) の議論より $b \geq 3$ である。よって $0 < a \leq b \leq c$ とあわせると
 $z = bc - a \geq b^2 - b = b(b-1) > 0$
 となるので, z は正の整数である。

 (b, c, z) が $b^2 + c^2 + z^2 = bcz$ を満たすことを確認する。

- $b^2 + c^2 + z^2$
 $= b^2 + c^2 + (bc - a)^2$ $\lll z = bc - a$ を代入

$$= b^2 + c^2 + a^2 - 2abc + b^2c^2 \quad \lll (bc - a)^2 \text{ を展開}$$

$$= abc - 2abc + b^2c^2 \quad \lll \textcircled{1} \text{ を代入}$$

$$= bc(bc - a)$$

$$= bcz \quad \lll z = bc - a \text{ とおいていた}$$

となり, 確かに $b^2 + c^2 + z^2 = bcz$ が成り立つ。

 最後に $b \leq c \leq z$ を確かめる。

- ② より $b \leq c$ は分かっている。
- また (1) の議論より $b \geq 3$ である。よって, $3 \leq b \leq c$ となる。従って

$$z - c = bc - a - c \quad \lll z = bc - a \text{ を代入}$$


$$\geq bc - b - c \quad \lll \textcircled{2} \text{ より } 0 < a \leq b$$

$$= (b - 1)(c - 1) - 1 > 0 \quad \lll c \geq b \geq 3 \text{ より}$$

となり, $c < z$ である。従って, $c \leq z$ でもある。

- 以上で, (a, b, c) が条件 (A) を満たすとき, $z = bc - a$ とおくと (b, c, z) も条件 (A) を満たすことが示された。
しかも, 実際には $c < z$ となっていることに注意する。

(3)

 条件 (A) を満たす組 (a, b, c) が見つければ (2) の方法を用いて新たに条件 (A) を満たす組 (b, c, z) を作る事ができる。こうして新しくできた組がすでにあるものとは異なることを確認する必要がある。

- (1) より $(a, b, c) = (3, 3, 3)$ は条件 (A) を満たす組である。
- $(a, b, c) = (3, 3, 3)$ から出発して, (2) の方法で次々 (b, c, z) を作っていくと, (2) で見たように $z > c$ となるので異なる組が次々得られるので無数に多くある。