

(問題 2)

$Q(x)$  を 2 次式とする。整式  $P(x)$  は  $Q(x)$  で割り切れないが、 $\{P(x)\}^2$  は  $Q(x)$  で割り切れるという。このとき、2 次方程式  $Q(x) = 0$  は重解をもつことを示せ。

(京都大)

☞  $Q(x)$  は 2 次式であるから、 $P(x)$  を  $Q(x)$  で割ると余りは 1 次以下であって、 $P(x) = Q(x)g(x) + ax + b$  と書ける。 $\{P(x)\}^2$  が  $Q(x)$  で割り切れることから  $Q(x)$  が具体的に求まる。

- $P(x)$  を  $Q(x)$  で割ると、 $Q(x)$  は 2 次式であるから余りは 1 次以下である。商を  $g(x)$ 、余りを  $ax + b$  とおくと、 $P(x) = Q(x)g(x) + ax + b \cdots \textcircled{1}$  となる。

☞  $\textcircled{1}$  の両辺を 2 乗して  $(ax + b)^2$  が  $Q(x)$  で割り切れることを示す。

- $\textcircled{1}$  の両辺を 2 乗すると  $\{P(x)\}^2 = \{Q(x)\}^2\{g(x)\}^2 + 2Q(x)g(x)(ax + b) + (ax + b)^2$  となるから、 $(ax + b)^2 = \{P(x)\}^2 - \{Q(x)\}^2\{g(x)\}^2 - 2Q(x)g(x)(ax + b) \cdots \textcircled{2}$  となる。

- 仮定から、 $\{P(x)\}^2$  は  $Q(x)$  で割り切れるから、 $\{P(x)\}^2 = Q(x)H(x)$  とおくと  $\textcircled{2}$  は、

$$\begin{aligned} (ax + b)^2 &= Q(x)H(x) - \{Q(x)\}^2\{g(x)\}^2 - 2Q(x)g(x)(ax + b) \\ &= Q(x)\{H(x) - Q(x)g(x)^2 - 2g(x)(ax + b)\} \end{aligned}$$

となるから、 $(ax + b)^2$  も  $Q(x)$  で割り切れる。

☞  $Q(x)$  が 2 次式であることに注意して、 $Q(x) = k(ax + b)^2$  と書けることを示す。これで  $Q(x) = 0$  は重解を持つと分かる。

- $Q(x)$  は 2 次式であり、一方  $(ax + b)^2$  は高々 2 次式であるから、 $(ax + b)^2$  を  $Q(x)$  で割った商は定数である。よって  $(ax + b)^2 = cQ(x) \cdots \textcircled{3}$  と書ける。

- $\textcircled{3}$  においてもし  $c = 0$  なら  $ax + b$  は 0 多項式となるが、それは  $\textcircled{1}$  より  $P(x)$  が  $Q(x)$  で割り切れることを意味し仮定に反する。

- よって  $c \neq 0$  であって  $Q(x) = \frac{1}{c}(ax + b)^2$  となる。

- また、もし  $a = 0$  なら  $Q(x)$  が 2 次式であることに反する。よって  $a \neq 0$  であるから、2 次方程式  $Q(x) = 0$  は重解  $x = -\frac{b}{a}$  をもつ。