

(問題 1)

整式 $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割ったときの余りは 9 であり, $(x-1)^2$ で割ったときの余りは 1 である。
 $P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

(山形大・医)

 (積で割った余り)

$f(x)$ を $g_1(x)g_2(x)$ で割った余りを $R(x)$ とすると,
 「 $f(x)$ を $g_1(x)$ で割った余り」と「 $R(x)$ を $g_1(x)$ で割った余り」は一致する。

$f(x)$ を $g_1(x)$ で割った余りが $R(x)$ であるから,

$f(x) = g_1(x)g_2(x)q(x) + R(x) \cdots \textcircled{1}$ かつ $(R(x) \text{ の次数}) < (g_1(x) \text{ の次数})$ と書ける。

また, $R(x)$ を $g_1(x)$ で割った余りを $r(x)$ とすると,

$R(x) = g_1(x)h(x) + r(x) \cdots \textcircled{2}$ かつ $(r(x) \text{ の次数}) < (g_1(x) \text{ の次数})$ と書ける。

$\textcircled{2}$ を $\textcircled{1}$ へ代入して

$f(x) = g_1(x)g_2(x)q(x) + g_1(x)h(x) + r(x) = g_1(x)\{g_2(x)q(x) + h(x)\} + r(x)$ かつ $(r(x) \text{ の次数}) < (g_1(x) \text{ の次数})$ となる。従って, $f(x)$ を $g_1(x)$ で割った余りは $r(x)$ となり, $R(x)$ を $g_1(x)$ で割った余りと一致する。

- $P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)^2$ で割ったときの余りを $R(x)$ とおくと $R(x)$ は 3 次以下であって, $R(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りは, $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余り 9 に等しい。よって,

$$R(x) = (ax+b)(x+1)^2 + 9 \cdots \textcircled{1} \text{ と書ける。}$$

◀◀ $R(x)$ は 3 次以下であるから, $(x+1)^2$ で割ったときの商は 1 次以下である。

- $R(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りは $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余り 1 に等しい。
- 実際に筆算で $\textcircled{1}$ の右辺を $(x-1)^2$ で割ると

$R(x) = (x-1)^2(ax+4a+b) + (8a+4b)x - 4a + 9$ となり, 余りは $(8a+4b)x - 4a + 9$ である。これが 1 となることより

$$8a + 4b = 0, \quad -4a + 9 = 1 \text{ である。従って } a = 2, b = -4 \text{ となる。}$$

- $a = 2, b = -4$ を $\textcircled{1}$ に代入して, $R(x) = \boxed{2x^3 - 6x + 5}$