

(問題 4)

半径 3 の球 T_1 と半径 1 の球 T_2 が、内接した状態で空間に固定されている。半径 1 の球 S が次の条件 (A), (B) を同時に満たしながら動く。

(A) S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している。

(B) S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している。

S の中心が存在し得る範囲を D とするとき、立体 D の体積を求めよ。

(大阪大・理系)

 xyz 座標軸を導入して考える。

- T_1, T_2 は空間内に固定されていて、半径 1 の球 T_2 は半径 3 の球 T_1 に内接しているの
で、 T_1 の中心が $O(0, 0, 0)$, T_2 の中心が $O_1(2, 0, 0)$ となるように座標軸をとる。

 条件 (A) (B) を数式で表現する。

- S の中心を $P(x, y, z)$ とおく。

条件 (A) より

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 2 \cdots \textcircled{1} \quad \leftarrow (\text{中心間の距離}) \leq (\text{半径の差}) \text{ である}$$

条件 (B) より

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} \geq 2 \cdots \textcircled{2} \quad \leftarrow (\text{中心間の距離}) \geq (\text{半径の和}) \text{ である}$$

- ① ② を書き直して

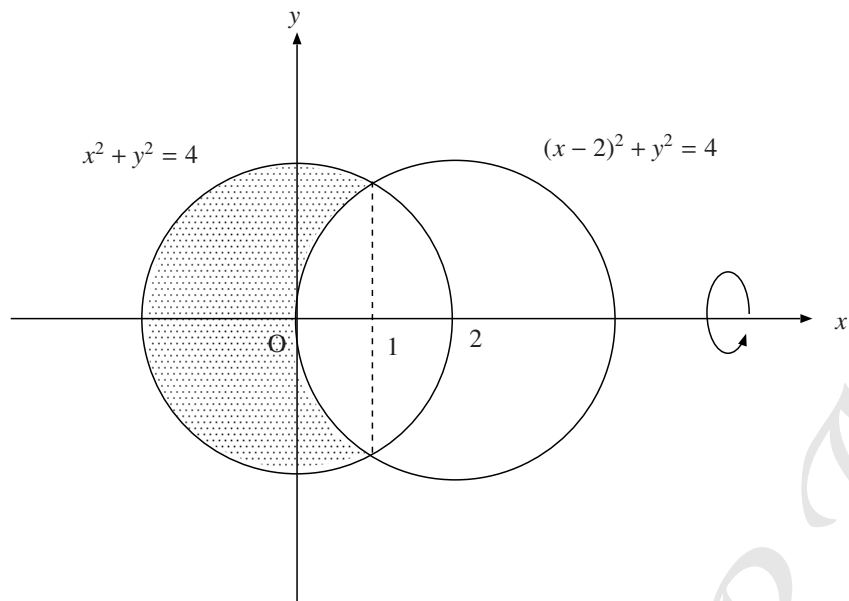
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \textcircled{3} \quad \text{かつ} \quad (x-2)^2 + y^2 + z^2 \geq 4 \cdots \textcircled{4}$$

を満たす (x, y, z) の全体が D である。

- ③ は原点中心で半径 2 の球であり、④ は $(2, 0, 0)$ を中心とする半径 2 の球である。
従って、 xy 平面上の 2 円

$$x^2 + y^2 = 4 \cdots \textcircled{5}, \quad (x-2)^2 + y^2 = 4 \cdots \textcircled{6}$$

を考えると、⑤ の内部および周のうち ⑥ の外部または周上の部分を x 軸の周りに回転して得られる立体が D である。



- 図より，求めるべき体積 V は

$$V = (\text{半径 } 2 \text{ の球の体積}) - 2 \times \left(\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4 \text{ のうち } 1 \leq x \leq 2 \text{ の部分を回転した} \\ \text{ものの体積} \end{array} \right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 - 2 \int_1^2 \pi(4 - x^2) dx$$

$$= \frac{32}{3}\pi - 2\pi \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2$$

$$= \frac{32}{3}\pi - \frac{10}{3}\pi$$

$$= \boxed{\frac{22}{3}\pi}$$