

(問題 3)

O を原点とする座標平面上の曲線

$$C: y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$$

と、その上の相異なる 2 点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ を考える。

- (1) P_i ($i = 1, 2$) を通る x 軸に平行な直線と、直線 $y = x$ との交点を、それぞれ H_i ($i = 1, 2$) とする。このとき $\triangle OP_1H_1$ と $\triangle OP_2H_2$ の面積は等しいことを示せ。
- (2) $x_1 < x_2$ とする。このとき C の $x_1 \leq x \leq x_2$ の範囲にある部分と、線分 P_1O , P_2O とで囲まれる図形の面積を、 y_1, y_2 を用いて表せ。

(東京大・理系)

 まず、曲線 C の概形を調べる。

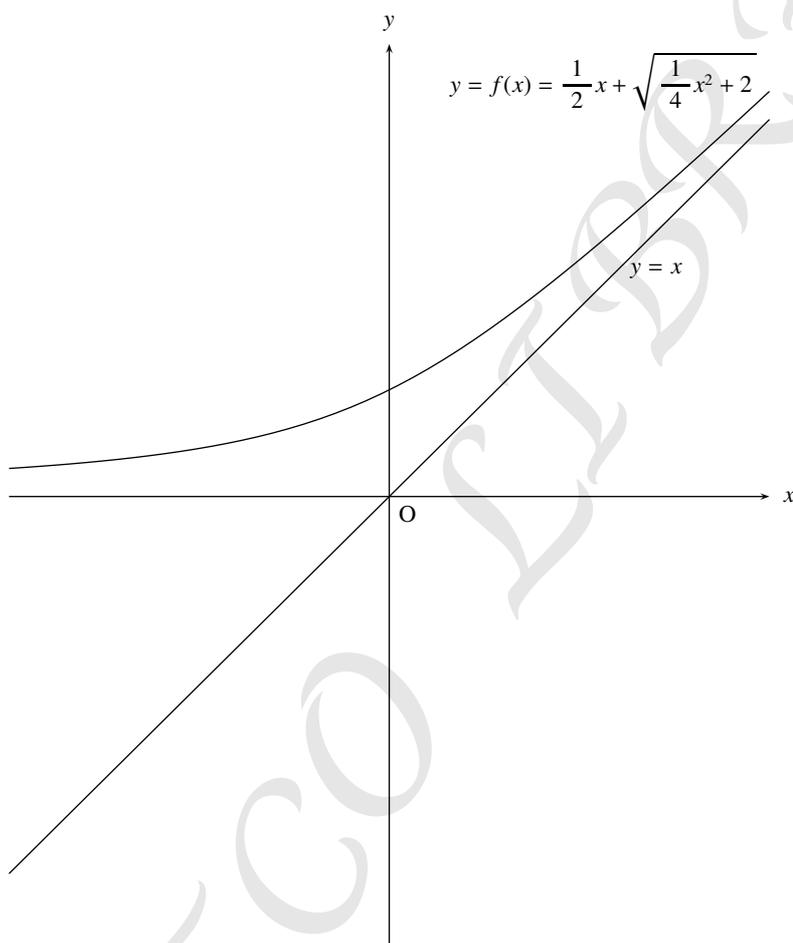
- $f(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$ とおく。
- $\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2} > \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2} = \frac{1}{2}x + \left| \frac{1}{2}x \right| \geq 0$ であるから、つねに $f(x) > 0$ である。
- $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}x}{2\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2} + \frac{1}{2}x}{2\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}}$ であるが、ここで
 $\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2} + \frac{1}{2}x > \sqrt{\frac{1}{4}x^2} + \frac{1}{2}x = \left| \frac{1}{2}x \right| + \frac{1}{2}x \geq 0$ であるから、つねに $f'(x) > 0$ となり $y = f(x)$ は単調増加である。
- また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2} \right) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{\frac{1}{2}x - \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}} = 0$

 $C: y = f(x)$ と直線 $y = x$ の上下関係を調べておく。

• $f(x) - x = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2} - \frac{1}{2}x > \sqrt{\frac{1}{4}x^2} - \frac{1}{2}x = \left| \frac{1}{2}x \right| - \frac{1}{2}x \geq 0$ であるから、つねに $f(x) > x$ である。

また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - x\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2} + \frac{1}{2}x} = 0$ であるから、 $y = x$ は $x \rightarrow \infty$ における C の漸近線である。

以上で、曲線 C の概形は次のようになる。



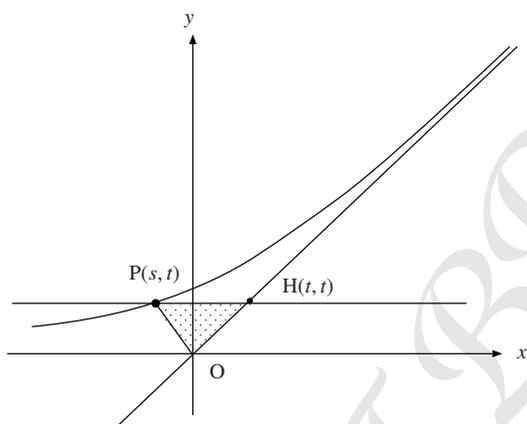
(1)

△ $P(s, t)$ を C 上の点とし、 P を通り x 軸に平行な直線と $y = x$ の交点を H とするとき、 $\triangle OPH$ の面積を計算する。これが (s, t) によらず一定の値になることを示せばよい。

- $P(s, t)$ を C 上の点とすると, $t = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}s^2 + 2}, \dots$ ①である。

🔍 逆に s を t で表しておくとなお便利である。

- ① より $t - \frac{1}{2}s = \sqrt{\frac{1}{4}s^2 + 2}$ であるから, $t^2 - ts + \frac{1}{2}s^2 = \frac{1}{4}s^2 + 2$ となり, $ts = t^2 - 2$ である。ここで, つねに $t > 0$ であるから $t \neq 0$ となるので両辺を t で割ると, $s = t - \frac{2}{t} \dots$ ②



- P を通り x 軸に平行な直線と, 直線 $y = x$ の交点 H は $H(t, t)$ である。そしてつねに $f(x) > x$ であるから, $t = f(s) > s$ である。
- PH を $\triangle OPH$ の底辺とみると, $PH = t - s$ で, 高さは t である。よって, $\triangle OPH$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \times (t - s) \times t$$

ここへ ② を代入すると

$$S = \frac{1}{2} \left\{ t - \left(t - \frac{2}{t} \right) \right\} t = 1$$

となり, (s, t) によらず一定の値になる。

- 以上で, $\triangle OP_1H_1$ と $\triangle OP_2H_2$ の面積はともに 1 で等しくなる。

(2)

🔍 $\sqrt{x^2 + A}$ の積分は $t = x + \sqrt{x^2 + A}$ と置換積分すればよい。今の場合は $t = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$ とおけばよい。

(1) の計算より, $t = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$ とおくと $x = t - \frac{2}{t}$ である。

 O と (x_1, y_1) を結ぶ直線と $y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$ が (x_1, y_1) 以外に交点をもたないことは直接計算で分かる。

• $x_1 = 0$ のときは, y 軸と C の交点は $(0, \sqrt{2})$ のみである。

$x_1 \neq 0$ のとき, O と (x_1, y_1) を結ぶ直線は $y = \frac{\frac{1}{2}x_1 + \sqrt{\frac{1}{4}x_1^2 + 2}}{x_1}x$ であるから, こ

れと $y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$ を連立して解くと

$$\frac{\frac{1}{2}x_1 + \sqrt{\frac{1}{4}x_1^2 + 2}}{x_1}x = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{\frac{1}{4}x_1^2 + 2}}{x_1}x = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$$

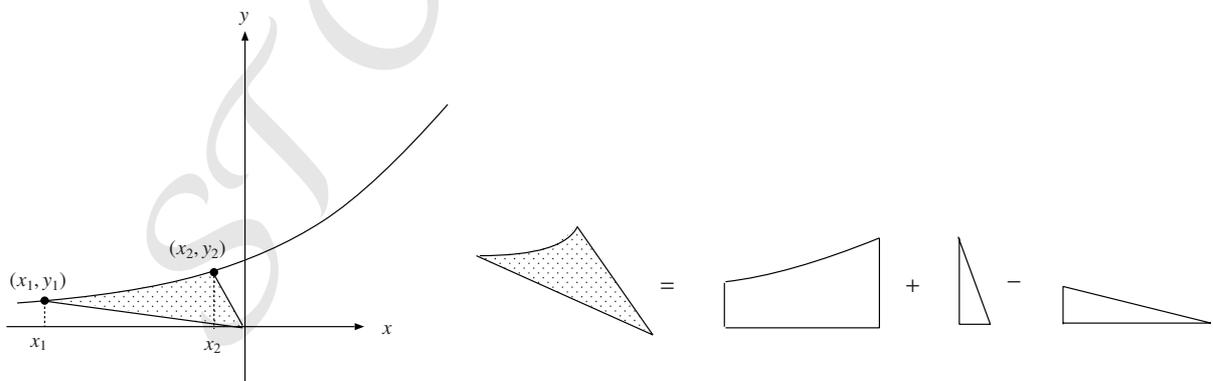
$$\Leftrightarrow x\sqrt{\frac{1}{4}x_1^2 + 2} = x_1\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$$

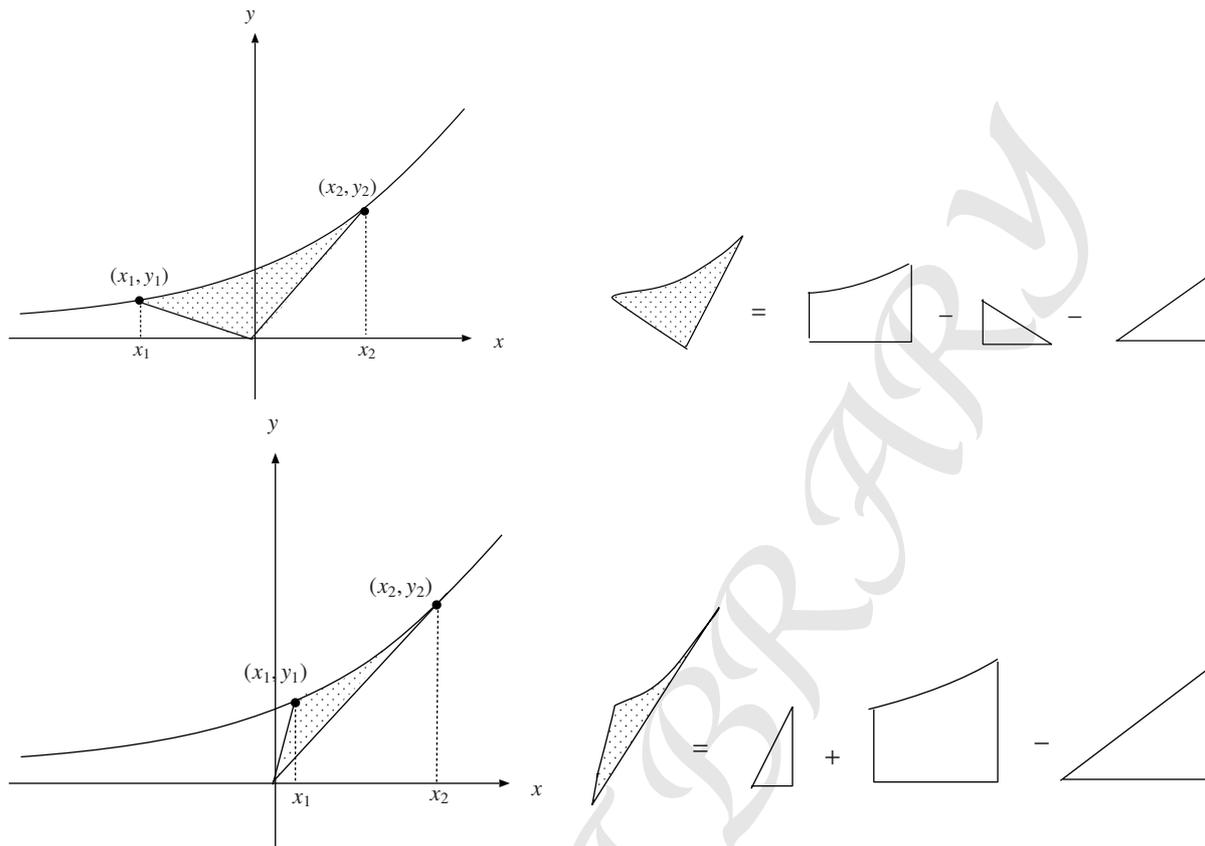
従って x と x_1 は同符号で, 両辺を 2 乗すると

$$x^2\left(\frac{1}{4}x_1^2 + 2\right) = x_1^2\left(\frac{1}{4}x^2 + 2\right)$$

となり, $x^2 = x_1^2$ であるが, x と x_1 は同符号であるから $x = x_1$ となる

以上より, 次の図のようになる。





• 図より、どの場合も囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y dx + \frac{1}{2} x_1 y_1 - \frac{1}{2} x_2 y_2 \dots \textcircled{1}$$

である。

• $t = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$ とおくと、

x	$x_1 \rightarrow x_2$
t	$y_1 \rightarrow y_2$

 で $x = t - \frac{2}{t}$ より $\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{2}{t^2}$

よって

$$\int_{x_1}^{x_2} y dx = \int_{y_1}^{y_2} t \left(1 + \frac{2}{t^2}\right) dt = \int_{y_1}^{y_2} \left(t + \frac{2}{t}\right) dt = \left[\frac{t^2}{2} + 2 \log t\right]_{y_1}^{y_2} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{2} + 2 \log \frac{y_2}{y_1} \dots \textcircled{2}$$

• $x_1 = y_1 - \frac{2}{y_1}$, $x_2 = y_2 - \frac{2}{y_2}$ より, $x_1 y_1 = y_1^2 - 2$, $x_2 y_2 = y_2^2 - 2$ となるから

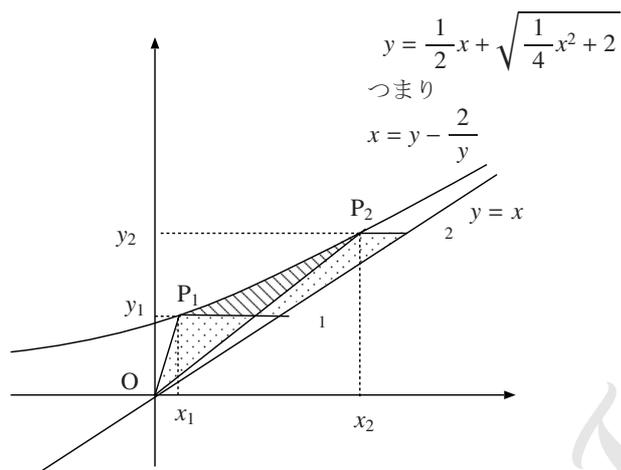
$$\frac{1}{2} x_1 y_1 - \frac{1}{2} x_2 y_2 = \frac{y_1^2 - 2}{2} - \frac{y_2^2 - 2}{2} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{2} \dots \textcircled{3}$$

- ② ③ を ① に代入して

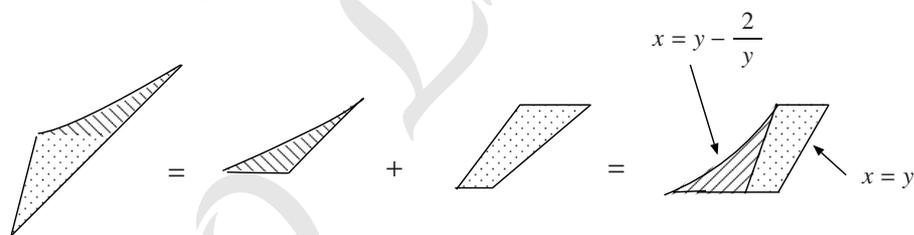
$$S = \frac{y_2^2 - y_1^2}{2} + 2 \log \frac{y_2}{y_1} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{2} = \boxed{2 \log \frac{y_2}{y_1}}$$

[注] (1) を利用した 解法

$t = x + \sqrt{x^2 + A}$ という置換積分部を使わずに考えるなら, (1) の結果を利用して y 軸方向への積分で面積を求める。



(1) より $\triangle OP_1 P_1 = \triangle OP_2 P_2$ であるから



従って, 囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_{y_1}^{y_2} \left\{ y - \left(y - \frac{2}{y} \right) \right\} dy = \left[2 \log y \right]_{y_1}^{y_2} = 2 \log \frac{y_2}{y_1}$$