

(問題 2)

(1) すべての自然数  $k$  に対して、次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$$

(2)  $m > n$  であるようなすべての自然数  $m$  と  $n$  に対して、次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

(東京大・理系)

(1)

 (定積分の単調性)

$a \leq x \leq b$  においてつねに  $f(x) \leq g(x)$  ならば、 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$  である。しかもここで等号が成立するのは、 $a \leq x \leq b$  においてつねに  $f(x) = g(x)$  となるときのみである。

  $0 \leq x \leq 1$  において  $\frac{1-x}{k+x}$  を上下から評価してから、定積分の単調性を利用する。

$0 \leq x \leq 1$  において  $1-x \geq 0$  であるから、分母を大きくすれば全体は小さくなり、分母を小さくすれば全体は大きくなる。

•  $0 \leq x \leq 1$  において

$$\frac{1}{k+1}(1-x) = \underbrace{\frac{1-x}{k+1}}_{\substack{\text{分母の } x \text{ を } 1 \\ \text{に置き換えた}}} \leq \frac{1-x}{k+x} \leq \underbrace{\frac{1-x}{k+0}}_{\substack{\text{分母の } x \text{ を } 0 \\ \text{に置き換えた}}} = \frac{1}{k}(1-x)$$

である。しかも  $0 \leq x \leq 1$  においてつねに  $\frac{1}{k+1}(1-x) = \frac{1-x}{k+x}$  や  $\frac{1-x}{k+x} = \frac{1}{k}(1-x)$  が成り立つ訳ではないので、定積分の単調性より

$$\frac{1}{k+1} \int_0^1 (1-x) dx < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{k} \int_0^1 (1-x) dx$$

となり

$$\frac{1}{k+1} \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{k} \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

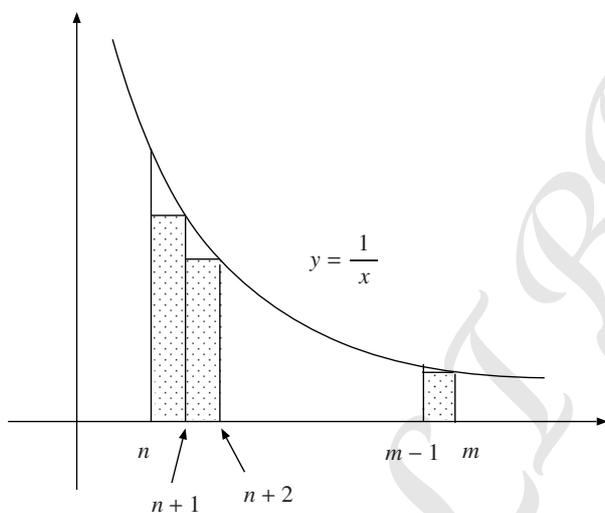
であるから

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$$

となり示された。

(2)

 まず、 $\log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k}$  を定積分で表すことを考える。 $y = \frac{1}{x}$  のグラフを参考にする。



  $\log \frac{m}{n}$  は  $y = \frac{1}{x}$  のグラフの下側の面積を表し、 $\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k}$  は図の長方形の面積和を表すことに注意する。

• 面積を考えると

$$\log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} = \left[ \log x \right]_n^m - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} = \int_n^m \frac{1}{x} dx - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k}$$

ここで  $\int_n^m \frac{1}{x} dx = \sum_{k=n+1}^m \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$ ,  $\frac{1}{k} = \int_{k-1}^k \frac{1}{k} dx$  に注意すると

$$\log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^m \int_{k-1}^k \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{k} \right) dx = \sum_{k=n+1}^m \int_{k-1}^k \frac{k-x}{kx} dx \dots \textcircled{1}$$

① (1)の結果を使うために、 $\int_{k-1}^k \frac{k-x}{kx} dx$  を  $0 \leq t \leq 1$  での定積分になるように置換積分する。 $t = x - (k-1)$

とおくと 

$x$	$k-1$	$\rightarrow$	$k$
$t$	$0$	$\rightarrow$	$1$

 となる。

•  $t = x - (k-1)$  とおくと 

$x$	$k-1$	$\rightarrow$	$k$
$t$	$0$	$\rightarrow$	$1$

 で  $\frac{dx}{dt} = 1$  であるから

$$\int_{k-1}^k \frac{k-x}{kx} dx = \int_0^1 \frac{1-t}{k\{(k-1)+t\}} dt = \frac{1}{k} \int_0^1 \frac{1-t}{(k-1)+t} dt \dots \textcircled{2}$$

• ここで (1) の結果を使うと  $\frac{1}{2k} < \int_0^1 \frac{1-t}{(k-1)+t} dt < \frac{1}{2(k-1)}$  であるから ② より

$$\frac{1}{2k^2} < \int_{k-1}^k \frac{k-x}{kx} dx < \frac{1}{2(k-1)k}$$

となり、① とあわせると

$$\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2k^2} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2(k-1)k} \dots \textcircled{3}$$

③ において  $\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2(k-1)k}$  は階差型の和に直せるので計算できるが、 $\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2k^2}$  はこのままでは計算で

きない。そこで  $k^2 < k(k+1)$  であるから  $\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2k(k+1)} < \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2k^2}$  となることを利用する。

•  $\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2k(k+1)} < \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2k^2}$  であるから、③ より

$$\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2k(k+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2(k-1)k} \dots \textcircled{4}$$

を得る。

④ この2つの和を階差型の和に直して計算する。

• 
$$\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2(k-1)k} = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^m \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \\
&= \frac{m-n}{2mn} \dots \textcircled{5}
\end{aligned}$$

• 一方

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2k(k+1)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^m \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) \\
&= \frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} \dots \textcircled{6}
\end{aligned}$$

• ⑤ ⑥ を ④ に代入すると

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

となり示された。