

(問題 2)

(1) すべての自然数 k に対して、次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$$

(2) $m > n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して、次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

(東京大・理系)

(1)

 (定積分の単調性)

$a \leq x \leq b$ においてつねに $f(x) \leq g(x)$ ならば、 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ である。しかもここで等号が成立するのは、 $a \leq x \leq b$ においてつねに $f(x) = g(x)$ となるときのみである。

 $0 \leq x \leq 1$ において $\frac{1-x}{k+x}$ を上下から評価してから、定積分の単調性を利用する。

$0 \leq x \leq 1$ において $1-x \geq 0$ であるから、分母を大きくすれば全体は小さくなり、分母を小さくすれば全体は大きくなる。

• $0 \leq x \leq 1$ において

$$\frac{1}{k+1}(1-x) = \underbrace{\frac{1-x}{k+1}}_{\substack{\text{分母の } x \text{ を } 1 \\ \text{に置き換えた}}} \leq \frac{1-x}{k+x} \leq \underbrace{\frac{1-x}{k+0}}_{\substack{\text{分母の } x \text{ を } 0 \\ \text{に置き換えた}}} = \frac{1}{k}(1-x)$$

である。しかも $0 \leq x \leq 1$ においてつねに $\frac{1}{k+1}(1-x) = \frac{1-x}{k+x}$ や $\frac{1-x}{k+x} = \frac{1}{k}(1-x)$ が成り立つ訳ではないので、定積分の単調性より

$$\frac{1}{k+1} \int_0^1 (1-x) dx < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{k} \int_0^1 (1-x) dx$$

となり

$$\frac{1}{k+1} \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{k} \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

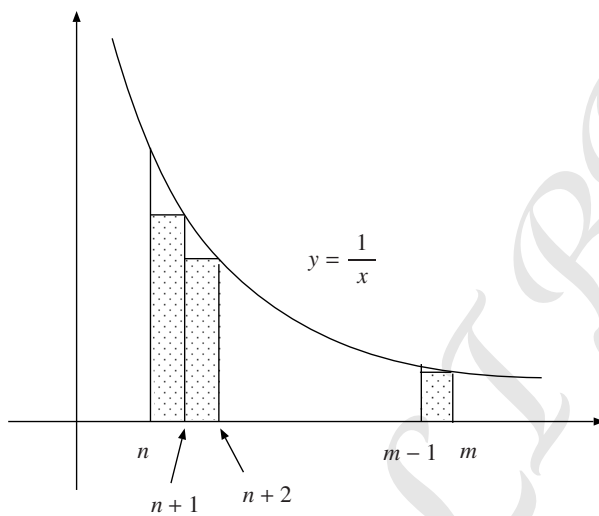
であるから

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$$

となり示された。

(2)

 まず、 $\log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k}$ を定積分で表すことを考える。 $y = \frac{1}{x}$ のグラフを参考にする。



 $\log \frac{m}{n}$ は $y = \frac{1}{x}$ のグラフの下側の面積を表し、 $\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k}$ は図の長方形の面積和を表すことに注意する。

• 面積を考えると

$$\log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} = \left[\log x \right]_n^m - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} = \int_n^m \frac{1}{x} dx - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k}$$

ここで $\int_n^m \frac{1}{x} dx = \sum_{k=n+1}^m \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$, $\frac{1}{k} = \int_{k-1}^k \frac{1}{k} dx$ に注意すると

$$\log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^m \int_{k-1}^k \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{k} \right) dx = \sum_{k=n+1}^m \int_{k-1}^k \frac{k-x}{kx} dx \dots \textcircled{1}$$

① (1)の結果を使うために、 $\int_{k-1}^k \frac{k-x}{kx} dx$ を $0 \leq t \leq 1$ での定積分になるように置換積分する。 $t = x - (k-1)$

とおくと

x	$k-1$	\rightarrow	k
t	0	\rightarrow	1

 となる。

• $t = x - (k-1)$ とおくと

x	$k-1$	\rightarrow	k
t	0	\rightarrow	1

 で $\frac{dx}{dt} = 1$ であるから

$$\int_{k-1}^k \frac{k-x}{kx} dx = \int_0^1 \frac{1-t}{k\{(k-1)+t\}} dt = \frac{1}{k} \int_0^1 \frac{1-t}{(k-1)+t} dt \dots \textcircled{2}$$

• ここで (1) の結果を使うと $\frac{1}{2k} < \int_0^1 \frac{1-t}{(k-1)+t} dt < \frac{1}{2(k-1)}$ であるから ② より

$$\frac{1}{2k^2} < \int_{k-1}^k \frac{k-x}{kx} dx < \frac{1}{2(k-1)k}$$

となり、① とあわせると

$$\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2k^2} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2(k-1)k} \dots \textcircled{3}$$

③ において $\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2(k-1)k}$ は階差型の和に直せるので計算できるが、 $\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2k^2}$ はこのままでは計算で

きない。そこで $k^2 < k(k+1)$ であるから $\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2k(k+1)} < \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2k^2}$ となることを利用する。

• $\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2k(k+1)} < \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2k^2}$ であるから、③ より

$$\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2k(k+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2(k-1)k} \dots \textcircled{4}$$

を得る。

④ この2つの和を階差型の和に直して計算する。

•
$$\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2(k-1)k} = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \\
&= \frac{m-n}{2mn} \dots \textcircled{5}
\end{aligned}$$

• 一方

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2k(k+1)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) \\
&= \frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} \dots \textcircled{6}
\end{aligned}$$

• ⑤ ⑥ を ④ に代入すると

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

となり示された。