

(問題 1)

(1) $f(x)$ を連続関数とするとき, $\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\int_0^\pi \frac{x \sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx$ の値を求めよ。

(横浜国大・工)

(1)

 積分範囲を保つような置換積分を考える。

• $t = \pi - x$ とおくと

x	$0 \rightarrow \pi$
t	$\pi \rightarrow 0$

 である。また $x = \pi - t$ であるから $\frac{dx}{dt} = -1$ である。

• 置換積分すると


$$\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \int_\pi^0 (\pi - t)f(\sin(\pi - t))(-1) dt$$

右辺で上端・下端を入れ換えて -1 を相殺し, また $\sin(\pi - t) = \sin t$ に注意すると

$$\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \int_0^\pi (\pi - t)f(\sin t) dt$$

ここで右辺の括弧を展開すると

$$\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - \int_0^\pi tf(\sin t) dt \cdots \textcircled{1}$$

 一般に a, b が定数のとき, $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b g(t) dt$ であることに注意する。

実際, 左辺は xy 平面上で $y = g(x)$ ($a \leq x \leq b$) と x 軸で挟まれた部分の符号つき面積であり, 右辺は tu 平面上で $u = g(t)$ ($a \leq t \leq b$) と t 軸で挟まれた部分の符号つき面積である。これらは合同な図形であるから値は一致する。

• $\int_0^\pi f(\sin t) dt = \int_0^\pi f(\sin x) dx$, $\int_0^\pi tf(\sin t) dt = \int_0^\pi xf(\sin x) dx$ であるから ① より

$$\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \pi \int_0^\pi f(\sin x) dx - \int_0^\pi xf(\sin x) dx$$

であるが, $\int_0^\pi xf(\sin x) dx$ を左辺へ移行してから 2 で割ると

$$\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

となり示された。

(2)

☞ $f(x) = \frac{x^3}{x^2+8}$ とおくと (1) の結果が利用できる。

• $I = \int_0^\pi \frac{x \sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx$ とおく。

• $f(x) = \frac{x^3}{x^2+8}$ とすると, $xf(x) = \frac{x \sin^3 x}{\sin^2 x + 8}$ であるから, $I = \int_0^\pi xf(x) dx$ となる。

従って, (1) の結果を利用すると $I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx$ である。

☞ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ と $(\cos x)' = -\sin x$ であることを利用する。

$$\frac{\sin^3 x}{\sin^2 x + 8} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + 8} \cdot \sin x = \left(1 - \frac{8}{\sin^2 x + 8}\right) \sin x = \left(1 - \frac{8}{9 - \cos^2 x}\right) \sin x$$

☞ 部分分数展開すると, $\frac{8}{9 - \cos^2 x} = \frac{8}{(3 - \cos x)(3 + \cos x)} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3 - \cos x} + \frac{1}{3 + \cos x} \right)$

•
$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \left\{ 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3 - \cos x} + \frac{1}{3 + \cos x} \right) \right\} \sin x dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin x dx - \frac{2}{3} \pi \int_0^\pi \left(\frac{\sin x}{3 - \cos x} + \frac{\sin x}{3 + \cos x} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin x dx - \frac{2}{3} \pi \int_0^\pi \left\{ \frac{(3 - \cos x)'}{3 - \cos x} - \frac{(3 + \cos x)'}{3 + \cos x} \right\} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{2} \left[-\cos x \right]_0^\pi - \frac{2}{3} \pi \left[\log(3 - \cos x) - \log(3 + \cos x) \right]_0^\pi && \blacktriangleleft 3 \pm \cos x > 0 \text{ であるから} \\ &= \pi - \frac{2}{3} \pi (\log 4 - \log 2 - \log 2 + \log 4) && \text{絶対値はつけなくてもよい} \\ &= \boxed{\left(1 - \frac{4 \log 2}{3} \right) \pi} \end{aligned}$$

STCO LIBRARY