

## (問題 1)

(1)  $f(x)$  を連続関数とするとき,  $\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$  が成り立つことを示せ。

(2) 定積分  $\int_0^\pi \frac{x \sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx$  の値を求めよ。

(横浜国大・工)

## (1)

 積分範囲を保つような置換積分を考える。

•  $t = \pi - x$  とおくと 

$x$	$0 \rightarrow \pi$
$t$	$\pi \rightarrow 0$

 である。また  $x = \pi - t$  であるから  $\frac{dx}{dt} = -1$  である。

• 置換積分すると

$$\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \int_\pi^0 (\pi - t)f(\sin(\pi - t))(-1) dt$$

右辺で上端・下端を入れ換えて  $-1$  を相殺し, また  $\sin(\pi - t) = \sin t$  に注意すると

$$\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \int_0^\pi (\pi - t)f(\sin t) dt$$

ここで右辺の括弧を展開すると

$$\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - \int_0^\pi tf(\sin t) dt \cdots \textcircled{1}$$

 一般に  $a, b$  が定数のとき,  $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b g(t) dt$  であることに注意する。

実際, 左辺は  $xy$  平面上で  $y = g(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) と  $x$  軸で挟まれた部分の符号つき面積であり, 右辺は  $tu$  平面上で  $u = g(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) と  $t$  軸で挟まれた部分の符号つき面積である。これらは合同な図形であるから値は一致する。

•  $\int_0^\pi f(\sin t) dt = \int_0^\pi f(\sin x) dx$ ,  $\int_0^\pi tf(\sin t) dt = \int_0^\pi xf(\sin x) dx$  であるから ① より

$$\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \pi \int_0^\pi f(\sin x) dx - \int_0^\pi xf(\sin x) dx$$

であるが,  $\int_0^\pi xf(\sin x) dx$  を左辺へ移行してから 2 で割ると

$$\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

となり示された。

(2)

☞  $f(x) = \frac{x^3}{x^2+8}$  とおくと (1) の結果が利用できる。

•  $I = \int_0^\pi \frac{x \sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx$  とおく。

•  $f(x) = \frac{x^3}{x^2+8}$  とすると,  $xf(x) = \frac{x \sin^3 x}{\sin^2 x + 8}$  であるから,  $I = \int_0^\pi xf(x) dx$  となる。

従って, (1) の結果を利用すると  $I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx$  である。

☞  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  と  $(\cos x)' = -\sin x$  であることを利用する。

$$\frac{\sin^3 x}{\sin^2 x + 8} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + 8} \cdot \sin x = \left(1 - \frac{8}{\sin^2 x + 8}\right) \sin x = \left(1 - \frac{8}{9 - \cos^2 x}\right) \sin x$$

☞ 部分分数展開すると,  $\frac{8}{9 - \cos^2 x} = \frac{8}{(3 - \cos x)(3 + \cos x)} = \frac{4}{3} \left( \frac{1}{3 - \cos x} + \frac{1}{3 + \cos x} \right)$

• 
$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \left\{ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{1}{3 - \cos x} + \frac{1}{3 + \cos x} \right) \right\} \sin x dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin x dx - \frac{2}{3} \pi \int_0^\pi \left( \frac{\sin x}{3 - \cos x} + \frac{\sin x}{3 + \cos x} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin x dx - \frac{2}{3} \pi \int_0^\pi \left\{ \frac{(3 - \cos x)'}{3 - \cos x} - \frac{(3 + \cos x)'}{3 + \cos x} \right\} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{2} \left[ -\cos x \right]_0^\pi - \frac{2}{3} \pi \left[ \log(3 - \cos x) - \log(3 + \cos x) \right]_0^\pi && \blacktriangleleft 3 \pm \cos x > 0 \text{ であるから} \\ &= \pi - \frac{2}{3} \pi (\log 4 - \log 2 - \log 2 + \log 4) && \text{絶対値はつけなくてもよい} \\ &= \boxed{\left( 1 - \frac{4 \log 2}{3} \right) \pi} \end{aligned}$$

STCO LIBRARY