

(問題 3)

2 次方程式 $x^2 - 4x - 1 = 0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α , 小さいものを β とする。
 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $s_n = \alpha^n + \beta^n$ とおく。

- (1) s_1, s_2, s_3 を求めよ。また, $n \geq 3$ に対し, s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。
- (2) β^3 以下の最大の整数を求めよ。
- (3) α^{2003} 以下の最大の整数の一の位の数を求めよ。

(東京大・理系)

$$x^2 - 4x - 1 = 0 \dots (*)$$

(1)

\triangleleft $s_1 = \alpha + \beta, s_2 = \alpha^2 + \beta^2, s_3 = \alpha^3 + \beta^3$ はすべて α, β に関する対称式なので, 基本対称式 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ の式として表せる。ここへ $(*)$ の解と係数の関係を代入すれば値が求まる。

- $(*)$ の解と係数の関係より $\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases} \dots \textcircled{1}$ である。

(i) $s_1 = \alpha + \beta$

- $\textcircled{1}$ より, $s_1 = \alpha + \beta = \boxed{4}$

(ii) $s_2 = \alpha^2 + \beta^2$

- $\textcircled{1}$ より, $s_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4^2 - 2 \cdot (-1) = \boxed{18}$

(iii) $s_3 = \alpha^3 + \beta^3$

- $\textcircled{1}$ より, $s_3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 4^3 - 3 \cdot (-1) \cdot 4 = \boxed{76}$

\triangleleft s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表すには, α, β が $\textcircled{1}$ の解であることを利用して, 次数下げを考える。

- α, β は $(*)$ の解であるから, $\alpha^2 - 4\alpha - 1 = 0, \beta^2 - 4\beta - 1 = 0$ である。

よって, $\alpha^2 = 4\alpha + 1, \beta^2 = 4\beta + 1 \dots \textcircled{2}$

\triangleleft $s_n = \alpha^n + \beta^n = \alpha^{n-2} \times \alpha^2 + \beta^{n-2} \times \beta^2$ であるから, $\textcircled{2}$ の 2 式にそれぞれ $\alpha^{n-2}, \beta^{n-2}$ を掛ける。

- ②より, $\alpha^n = 4\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}$, $\beta^n = 4\beta^{n-1} + \beta^{n-2}$ であるから, 辺々加えると

$$\alpha^n + \beta^n = 4(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) + (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2})$$
- 従って, $s_n = 4s_{n-1} + s_{n-2}$ という漸化式を得る。

(2)

☞ β^3 の整数部分を求めるので, 具体的に 2 次方程式 (*) を解いて β を計算する。

- β は (*) の小さい方の実数解であるから, 解の公式より $\beta = 2 - \sqrt{5}$ であり, $-1 < \beta < 0$ である。よって $-1 < \beta^3 < 0$ である。

☞ $-1 < \beta^3 < 0$ つまり $\beta^3 = -0.****$ の形。

- β^3 以下の最大の整数は $\boxed{-1}$

(3)

☞ $s_n = \alpha^n + \beta^n$ であるが, (1) より s_n ($n \geq 1$) はすべて整数であることが分かる。

- (1) の結果より $s_1 = 4$, $s_2 = 18$, $s_n = 4s_{n-1} + s_{n-2} \dots$ ① であるから $n = 1, n = 2$ のときから始めて ① を繰り返し用いると s_n はすべて整数であることが帰納的に分かる。

☞ $s_n = \alpha^n + \beta^n$ より, $\alpha^n = s_n - \beta^n$ であるが $-1 < \beta < 0$ とあわせると α^n の整数部分が分かる。

- $s_{2003} = \alpha^{2003} + \beta^{2003}$ より, $\alpha^{2003} = s_{2003} - \beta^{2003} \dots$ ③ である。そして, $-1 < \beta < 0$ であるから $-1 < \beta^{2003} < 0$ となる。よって $s_{2003} < s_{2003} - \beta^{2003} < s_{2003} + 1$ であるから, ③ より $s_{2003} < \alpha^{2003} < s_{2003} + 1$ となる。
- 従って, α^{2003} 以下の最大の整数は, s_{2003} である。

☞ s_{2003} の一の位の数を求めればよいので, mod 10 で考えればよい。そこで $\{s_n \pmod{10}\}$ を考える。

- $\text{mod } 10$ で考えると,
 $s_1 \equiv 4 \pmod{10}, s_2 \equiv 8 \pmod{10}$ で $s_n \equiv 4s_{n-1} + s_{n-2} \pmod{10} \quad (n \geq 3)$
- この初期条件・漸化式でいくつかの項を実際に計算すると

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$s_n \pmod{10}$	4	8	6	2	4	8	6	...

 同一の初期条件・漸化式からは、同じ数列が得られることに注意すると、 $\{s_n \pmod{10}\}$ は周期数列であることが分かる。

- 表より、 $s_5 \equiv 4 \pmod{10}, s_6 \equiv 8 \pmod{10}$ である。同じ初期条件・漸化式からは同じ数列が得られるので、 $\{s_n \pmod{10}\}$ は $(4, 8, 6, 2)$ の繰り返しである。
- $2003 = 500 \cdot 4 + 3$ であるから、
 $s_{2001} \equiv 4 \pmod{10}, s_{2002} \equiv 8 \pmod{10}, s_{2003} \equiv 6 \pmod{10}, s_{2004} \equiv 2 \pmod{10}$ となる。
- 従って、 a^{2003} 以下の最大の整数 s_{2003} の一の位の数は、**6** である。