

(問題 2)

定数 a は実数であるとする。関数 $y = |x^2 - 2|$ と $y = |2x^2 + ax - 1|$ のグラフの共有点はいくつあるか。 a の値によって分類せよ。

(京都大・理系)

🔍 グラフで考えるのではなく、2つの式を連立して得られる方程式 $|x^2 - 2| = |2x^2 + ax - 1|$ の相異なる実数解の個数を調べる。

🔍 一般に、 $|A| = |B| \iff A^2 = B^2 \iff (A - B)(A + B) = 0 \iff A = \pm B$
従って、 $|A| = |B| \iff A = \pm B$ であることを利用して同値変形する。

- 関数 $y = |x^2 - 2|$ と $y = |2x^2 + ax - 1|$ のグラフの共有点の個数は、
方程式 $|x^2 - 2| = |2x^2 + ax - 1| \dots \textcircled{1}$ の相異なる実数解の個数 N に等しい。
- $\textcircled{1}$ を変形すると、 $2x^2 + ax - 1 = \pm(x^2 - 2)$ つまり
 $x^2 + ax + 1 = 0 \dots \textcircled{2}$ または $3x^2 + ax - 3 = 0 \dots \textcircled{3}$
となる。従って「 $\textcircled{2}$ または $\textcircled{3}$ 」の相異なる実数解の個数が N である。

🔍 $\textcircled{2}$ と $\textcircled{3}$ が共通解をもたないときは、それぞれの相異なる実数解の個数の和が N であるが、共通解をもつときは、数えるとき重なりに注意せねばならない。

🔍 まず $\textcircled{2}$ と $\textcircled{3}$ が共通解をもつときを考察する。共通解をもつときの a の値をすべて求め、またそのときの $\textcircled{2}$ $\textcircled{3}$ の実数解を調べる。

- $\textcircled{2}$ と $\textcircled{3}$ が共通解 u をもつとすると、 $\begin{cases} u^2 + au + 1 = 0 \\ 3u^2 + au - 3 = 0 \end{cases}$ である。これを同値変形する。
- $\begin{cases} u^2 + au + 1 = 0 \\ 3u^2 + au - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u^2 + au + 1 = 0 \\ au + 3 = 0 \end{cases} \quad \lll 3 \times (\text{第1式}) - (\text{第2式}) \text{ を } 2 \text{ で割った}$
 $\iff \begin{cases} u^2 - 3 + 1 = 0 \\ au + 3 = 0 \end{cases} \quad \lll \text{第2式から } au = -3 \text{ であるから、これを第1式に代入}$
 $\iff (u, a) = \left(\sqrt{2}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(-\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

④ $a = \frac{3}{\sqrt{2}}$ のとき, ② ③ はそれぞれ

$$\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2} = 0, \quad \sqrt{2}x^2 + x - \sqrt{2} = 0$$

となるから, それぞれの解は, $\left\{-\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ と $\left\{-\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ となる。よって, 共通解は 1 個だけで, $N = 3$ である。

④ $a = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ のとき, ② ③ はそれぞれ

$$\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0, \quad \sqrt{2}x^2 - x - \sqrt{2} = 0$$

となるから, それぞれの解は, $\left\{\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ と $\left\{\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ となる。よって, 共通解は 1 個だけで, $N = 3$ である。

④ 共通解をもつ場合については終ったので, 今度は共通解をもたないときに考える。このときは, ② ③ の実数解の個数の和が N である。

- $a \neq \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$ のときに考える。このとき, ② ③ は共通解をもたない。
- ② の判別式は $D_1 = a^2 - 4$, ③ の判別式は $D_2 = a^2 + 36$ である。
- $D_2 = a^2 + 36 > 0$ であるから, ③ はつねに相異 2 実解をもつ。
- $D_1 = a^2 - 4$ であるから, $a < -2$ または $a > 2$ のとき ② は相異 2 実解をもち, $a = \pm 2$ のとき重解, $-2 < a < 2$ のときは実数解をもたない。

④ $-\frac{3}{\sqrt{2}} < -2, 2 < \frac{3}{\sqrt{2}}$ に注意して場合分けをして N を答える。

- 以上より, N の値は次の通りとなる。

$ a < 2$ のとき	2 個
$ a = 2$ のとき	3 個
$2 < a < \frac{3}{\sqrt{2}}$ のとき	4 個
$ a = \frac{3}{\sqrt{2}}$ のとき	3 個
$ a > \frac{3}{\sqrt{2}}$ のとき	4 個