


## (問題 1)

$\alpha, \beta$  を  $0 < \alpha < \beta < 2$  を満たす実数とし、 $0 \leq x \leq 2$  の範囲で定義された関数  $f(x)$  を  $f(x) = |(x - \alpha)(x - \beta)|$  とする。

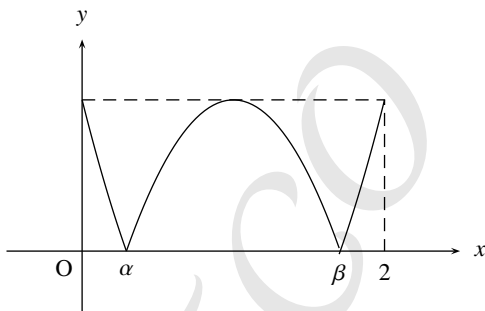
- (1)  $f(x)$  の最大値を  $M$  とする。  $f(x) = M$  となる  $x$  がちょうど 3 つあるとき、実数  $\alpha, \beta$  と  $M$  の値を求めよ。
- (2) (1) で求めた  $\alpha, \beta$  について、  $f(x) - mx = 0$  が異なる 3 つの解をもつような実数  $m$  の値の範囲を求めよ。


(北海道大・理系)

## (1)

 まず、  $f(x) = M$  となる  $x$  がちょうど 3 つあるのは、  $x = 0, \frac{\alpha + \beta}{2}, 2$  で最大となるときであることを示す。

- 端点以外で最大値をとることがないとすると、  $f(x) = M$  となる  $x$  は高々 2 つしかなく仮定に反して矛盾である。よって、端点以外に最大値をとる  $x$  が存在する。このとき、最大となる点において極大でもあるから  $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$  で最大でなければならない。
- $f(x)$  は、  $0 \leq x \leq \alpha$  においては単調減少、  $\beta \leq x \leq 2$  においては単調増加であるから、  $f(x) = M$  となる  $x$  がちょうど 3 つあるのは、  $x = 0, \frac{\alpha + \beta}{2}, 2$  において最大となるときである。



  $\alpha, \beta$  の関係式を求めるときに、グラフの対称性を利用する。  
 $\alpha + \beta$  と  $\alpha\beta$  を求め、これより  $\alpha, \beta$  の値を計算する。

- $f(0) = f(2)$  である。2 次関数のグラフは軸に関して対称であるから、  $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{0 + 2}{2}$  従って、  $\alpha + \beta = 2 \cdots \textcircled{1}$  である。

- $0 < \alpha < \beta < 2$  に注意して計算する。

$f(0) = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$  より,  $\alpha\beta = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$ 。従って,  $4\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$  这儿 ① を代入すると,  $\alpha\beta = \frac{1}{2}$  … ②

- ① ② より,  $\alpha, \beta$  は, 2 次方程式  $t^2 - 2t + \frac{1}{2} = 0$  つまり  $2t^2 - 4t + 1 = 0$  の 2 解である。これを解くと,  $t = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$  となる。

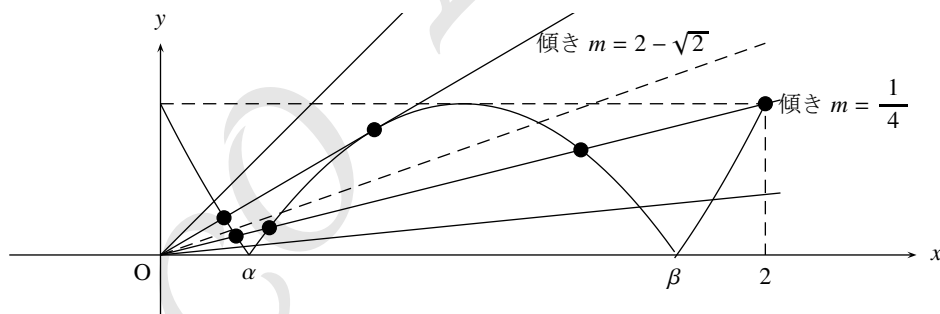
- $0 < \alpha < \beta < 2$  であるから,  $\alpha = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ,  $\beta = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$  となる。

- 最大値は,  $M = f(0) = \alpha\beta = \frac{1}{2}$  である。

- 以上より,  $\alpha = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ,  $\beta = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ,  $M = \frac{1}{2}$

(2)

- ④  $y = f(x)$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) のグラフと直線  $y = mx$  が相異なる 3 点で交わるような  $m$  の値の範囲を求めればよい。グラフを参考に考える。直線が接するときの  $m$  の値, 直線が  $\left(2, \frac{1}{2}\right)$  を通るとき  $m$  の値に注目すればよい。



- $y = f(x) = \left|x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right|$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) のグラフと直線  $y = mx$  が相異なる 3 点で交わるような  $m$  の範囲を求める。

- $y = mx$  が  $\left(2, \frac{1}{2}\right)$  を通るとき,  $m = \frac{1}{4}$  である。

- $y = mx$  が図のように  $y = f(x)$  と接するときの  $m$  を求める。 $y = mx$  と  $y = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$  が接する

ので、連立して  $x^2 + (m-2)x + \frac{1}{2} = 0$  が重解をもてばよい。判別式をとると、 $D = (m-2)^2 - 2 = 0$  となり  $m = 2 \pm \sqrt{2}$  となるが、図より  $m = 2 - \sqrt{2}$  である。

- $m = 2 - \sqrt{2}$  のとき、交点は 2 個。 $m = \frac{1}{4}$  のとき、交点は 4 個であることに注意すると、交

点の個数が 3 個となる  $m$  の範囲は、 $\boxed{\frac{1}{4} < m < 2 - \sqrt{2}}$