

(問題 4)

コンピュータの画面に、記号○×のいずれかを表示させる操作を繰り返し行なう。このとき、各操作で、直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は、それまでの経過に関係なく、 p であるとする。

最初に、コンピュータの画面に記号×が表示された。操作を繰り返し行ない、記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に、記号○が n 個出る確率を P_n とする。但し、記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1) P_2 を p で表せ。

(2) $n \geq 3$ のとき、 P_n を p と n で表せ。

(東大・理科)

(1)

 題意に適する○×の出方が簡単に分かるので直接 P_n が計算できる。

- 考えられるのは

$$\times \xrightarrow{1-p} \circ \xrightarrow{p} \circ$$

$$\times \xrightarrow{p} \times \xrightarrow{1-p} \circ \xrightarrow{p} \circ$$

$$\times \xrightarrow{1-p} \circ \xrightarrow{1-p} \times \xrightarrow{1-p} \circ$$

のいずれかの場合である。

$$\begin{aligned} P_2 &= (1-p)p + p(1-p)p + (1-p)^3 \\ &= (1-p)(p + p^2 + 1 - 2p + p^2) \\ &= \boxed{(1-p)(1-p+2p^2)} \end{aligned}$$

(2)

 (1) と同様に考える。

- (ア) × は最初の 1 回だけで後 ○ が n 回続く

$$\times \xrightarrow{1-p} \overbrace{\circ \xrightarrow{p} \circ \xrightarrow{p} \dots \xrightarrow{p} \circ}^{\text{○が } n \text{ 個}}$$

このような場合が起こる確率は $(1-p)p^{n-1}$

- (イ) 最初に \times が 2 回出て後 \circ が n 回続く

$$\times \xrightarrow{p} \times \xrightarrow{1-p} \overbrace{\circ \xrightarrow{p} \circ \xrightarrow{p} \dots \xrightarrow{p} \circ}^{\text{○が } n \text{ 個}}$$

このような場合が起こる確率は $p(1-p)p^{n-1} = (1-p)p^n$

- (ウ) 最初の \times の後に \circ が k ($1 \leq k \leq n-1$) 回続けて出、次に \times その後 \circ が $n-k$ 回出る。

$$\times \xrightarrow{1-p} \overbrace{\circ \xrightarrow{p} \dots \xrightarrow{p} \circ}^{\text{○が } k \text{ 個}} \xrightarrow{1-p} \times \xrightarrow{1-p} \overbrace{\circ \xrightarrow{p} \circ \dots \xrightarrow{p} \circ}^{\text{○が } n-k \text{ 個}}$$

このような場合が起こる確率は $(1-p)p^{k-1}(1-p)^2p^{n-k-1} = (1-p)^3p^{n-2}$

☞ あらゆる場合の確率の和を計算すればよい。

(ウ) の場合は、 $1 \leq k \leq n-1$ なる k について和をとる。

$$\begin{aligned} P_n &= (1-p)p^{n-1} + (1-p)p^n + \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^3p^{n-2} \\ &= (1-p)p^{n-1} + (1-p)p^n + (n-1)(1-p)^3p^{n-2} \\ &= (1-p)p^{n-2} \{p + p^2 + (n-1)(1-p)^2\} \\ &= \boxed{(1-p)p^{n-2} \{n-1 - (2n-3)p + np^2\}} \end{aligned}$$

[注] $n \geq 2$ のときに 漸化式を立てる こともできる。

\times が 3 回でる前に \circ が $n+1$ 回でるための条件を考える。

最後は \circ で終るから、最後の 2 つは $\circ\circ$ または $\times\circ$ であって

$$(i) \times \dots \overbrace{\circ}^{n \text{ 個目の } \circ} \vdots \overbrace{\circ}^{n+1 \text{ 個目の } \circ}$$

$$(ii) \times \dots \times \vdots \overbrace{\circ}^{n+1 \text{ 個目の } \circ}$$

◀◀ \times は高々 2 個しか出ないので、この場合は $\times \overbrace{\circ \dots \circ}^{n \text{ 個}} \times \circ$ ということに他ならない

のどちらかである。

(i) は、 \times が 3 回でる前に \circ が n 回出て、続けて直前と同じ \circ が出るということなのでその確率は $p_n \times p$ である。

$$(ii) \text{ は、 } \times \xrightarrow{1-p} \underbrace{\circ \xrightarrow{p} \dots \xrightarrow{p} \circ}_{\text{○が } n \text{ 個}} \xrightarrow{1-p} \times \xrightarrow{1-p} \circ$$

となるということなので、その確率は

$(1-p)p^{n-1}(1-p)^2 = (1-p)^3p^{n-1}$ である。よって $p_{n+1} = pp_n + (1-p)^3p^{n-1}$ という漸化式を得る。