

(問題 3)

n 枚の 100 円玉と $n+1$ 枚の 500 円玉を同時に投げたとき、表の出た 100 円玉の枚数より表の出た 500 円玉の枚数の方が多い確率を求めよ。

(京大・理系 (後期))

🔍 もし 100 円玉と 500 円玉の枚数が同じなら、100 円玉の方が 500 円玉より多く表が出る確率と 500 円玉の方が 100 円玉より多く表が出る確率は同じであることを利用する。

🔍 500 円玉の方が 1 枚多いので、500 円玉のうちの特定の 1 枚に着目して場合を分けて考える。

- n 枚ある 100 円玉のうちの表の枚数を X とする。

$n+1$ 枚ある 500 円玉のうちの 1 枚を a とする。 a 以外の n 枚の 500 円玉のうちの表の枚数を Y とする。

- 求めるべき確率を p とすると

$$\begin{aligned}
 p &= \overbrace{\frac{1}{2}}^{a \text{ が裏}} \times \overbrace{P(X < Y)}^{a \text{ が表} \text{ が多い}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a \text{ が表}} \times \{P(X = Y) + P(X < Y)\} \\
 &\quad \text{残りの } n \text{ 枚の } 500 \text{ 円玉の表の枚数が } 100 \text{ 円玉の枚数より多い} \\
 &\quad \text{残りの } n \text{ 枚の } 500 \text{ 円玉の表の枚数が } 100 \text{ 円玉の枚数と同じか、より多い} \\
 &= P(X < Y) + \frac{1}{2}P(X = Y) \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

🔍 100 円玉と 500 円玉の枚数が同じなら、100 円玉の方が 500 円玉より多く表が出る確率と 500 円玉の方が 100 円玉より多く表が出る確率は同じである。

また、全事象の確率は 1 である。

- $P(X > Y) = P(X < Y)$ かつ $P(X < Y) + P(X = Y) + P(X > Y) = 1$ であるから、

$$P(X < Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P(X = Y) \text{ となる。}$$

- これを ① に代入すると

$$p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P(X = Y) + \frac{1}{2}P(X = Y) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

[注] **直接計算** で求めてみる。

- 表の出た 100 円玉の枚数が ℓ となる確率は、 ${}_n C_\ell \left(\frac{1}{2}\right)^\ell \left(\frac{1}{2}\right)^{n-\ell} = \left(\frac{1}{2}\right)^n {}_n C_\ell$
- 表の出た 500 円玉の枚数が k となる確率は、 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} {}_{n+1} C_k$

☞ 表の出た 500 円玉の枚数が k のとき、表の出た 100 円玉の枚数を ℓ とすると、 $0 \leq \ell \leq k$ となればよい。

- 求めるべき確率 p は、

$$p = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} {}_{n+1} C_k \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n {}_n C_\ell \right\} \right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \sum_{k=1}^{n+1} {}_{n+1} C_k \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} {}_n C_\ell \right) \cdots \textcircled{1} \text{となる。}$$

☞ $S = \sum_{k=1}^{n+1} {}_{n+1} C_k \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} {}_n C_\ell \right)$ を計算すれば、 $p = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} S$ で p が得られる。

- ${}_n C_\ell = {}_n C_{n-\ell}$ を使うと、 $S = \sum_{k=1}^{n+1} {}_{n+1} C_k \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} {}_n C_\ell \right) = \sum_{k=1}^{n+1} {}_{n+1} C_k \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} {}_n C_{n-\ell} \right)$ となる。

☞ ${}_{n+1} C_*$ が出てくるのは $(x+1)^{n+1}$ の展開であり、 ${}_n C_*$ が出てくるのは $(x+1)^n$ の展開である。
そこで $(x+1)^{n+1}(1+x)^n$ の展開を考える。

☞ $\sum_{k=1}^{n+1} {}_{n+1} C_k \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} {}_n C_{n-\ell} \right)$ を調べるために、 $\sum_{k=1}^{n+1} {}_{n+1} C_k x^k \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} {}_n C_{n-\ell} x^{n-\ell} \right)$ の展開を考える。

•

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n+1} {}_{n+1} C_k x^k \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} {}_n C_{n-\ell} x^{n-\ell} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} {}_{n+1} C_k x^k \left({}_n C_n x^n + {}_n C_{n-1} x^{n-1} + \cdots + {}_n C_{n+1-k} x^{n+1-k} \right) \\ &= {}_{n+1} C_1 x \cdot {}_n C_n x^n + {}_{n+1} C_2 x^2 \cdot \left({}_n C_n x^n + {}_n C_{n-1} x^{n-1} \right) + \cdots + {}_{n+1} C_{n+1} x^{n+1} \cdot \left({}_n C_n x^n + {}_n C_{n-1} x^{n-1} + \cdots + {}_n C_0 \right) \end{aligned}$$

- これは

$$\left({}_{n+1} C_0 + {}_{n+1} C_1 x + \cdots + {}_{n+1} C_{n+1} x^{n+1} \right) \times \left({}_n C_0 + {}_n C_1 x + \cdots + {}_n C_{n-1} x^{n-1} + {}_n C_n x^n \right)$$

の展開において、 $n+1$ 次以上の項をすべて集めたものに他ならない。

- よって、 $(x+1)^{n+1}(x+1)^n = (x+1)^{2n+1}$ の展開における、 $n+1$ 次以上の項の係数の総和が S である。

 $(x+1)^{2n+1}$ を実際に展開してみる。

- $(x+1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} {}_{2n+1}C_k x^k \cdots$ ② であるから、 $n+1$ 次以上の項の係数の和を求めると

$$S = {}_{2n+1}C_{n+1} + {}_{2n+1}C_{n+2} + \cdots + {}_{2n+1}C_{2n+1} \cdots$$
 ③ である。

- 一方、② において $x=1$ とすると

$$2^{2n+1} = {}_{2n+1}C_0 + {}_{2n+1}C_1 + \cdots + {}_{2n+1}C_n + {}_{2n+1}C_{n+1} + \cdots + {}_{2n+1}C_{2n+1}$$

- ここで ${}_{2n+1}C_r = {}_{2n+1}C_{2n+1-r}$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} 2^{2n+1} &= {}_{2n+1}C_{2n+1} + {}_{2n+1}C_{2n} + \cdots + {}_{2n+1}C_{n+1} + {}_{2n+1}C_{n+1} + \cdots + {}_{2n+1}C_{2n+1} \\ &= 2({}_{2n+1}C_{n+1} + \cdots + {}_{2n+1}C_{2n+1}) \\ &= 2S \quad \lll \text{③ より} \end{aligned}$$

となり、 $S = 2^{2n}$ である。

- $p = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} S$ より、 $p = \frac{1}{2}$ となる。