

(問題 2)

以下の問に答えよ。

(1) 次の 3 条件 (a), (b), (c) を満たす整数の組 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ の個数を求めよ。

(a) $a_1 \geq 1$

(b) $a_5 \leq 4$

(c) $a_i \leq a_{i+1} \ (i = 1, 2, 3, 4)$

(2) 次の 3 条件 (a), (b), (c) を満たす整数の組 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ の個数を求めよ。

(a) $a_1 \geq 1$

(b) $a_i \geq 0 \ (i = 2, 3, 4, 5)$

(c) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 4$

(3) n 桁の自然数で各桁の数字の合計が r 以下となるものの個数を n, r を用いて表せ。但し $n \geq 1, r \leq 9$ とする。

(東京医科歯科大)

(1)

 考えている整数の組と 1:1 に対応するものを考えてその個数を求める。

- $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq 4$ であるから、現れる数字は 1 から 4 のいずれかで、小さいものから順に並べることになる。
- $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ と 1 から 4 の数字が現れる回数の組が 1:1 に対応する。
- 1, 2, 3, 4 の現れる回数をそれぞれ x, y, z, w 回とする。

 例えば、 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, 1, 2, 2, 4)$ と $(x, y, z, w) = (2, 2, 0, 1)$ が対応する。

- $x + y + z + w = 5 \ (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, w \geq 0)$ となる整数の組 (x, y, z, w) の個数が求めるものである。
- 5 個の \circ と 3 本の $|$ を一列に並べる並べ方の個数を考えればよい。

 「8個用意された箱のうちのどの5個に○を入れるか」を考えると ${}_8C_5$ 通りとなる。

- 5個の○と3本の | を一列に並べる並べ方の個数を考えて、 ${}_8C_5 = \boxed{56}$ 個

(2)

 不等式を等式に直して考えるための工夫をする。

- $b = 4 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$ とおくと

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 4 \\ a_1 \geq 1, \quad a_2, a_3, a_4, a_5 \geq 0 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + b = 4 & \dots \textcircled{1} \\ a_1 \geq 1, \quad a_2, a_3, a_4, a_5, b \geq 0 \end{cases}$$

である。

 すべてが0以上という条件になるように工夫すれば、(1)と同様に、○と|の並べ方の個数を数えることに帰着できる。

- ①の両辺から1を引くと

$$\begin{cases} (a_1 - 1) + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + b = 3 \\ a_1 - 1, a_2, a_3, a_4, a_5, b \geq 0 \end{cases}$$

となる。

- これを満たす整数の組 $(a_1 - 1, a_2, a_3, a_4, a_5, b)$ の個数は

3個の○と5本の | を一列に並べる並べ方を考えて ${}_8C_5 = \boxed{56}$ である。

(3)

 (2)と同様に考える。

- 各桁の数字を上から順に

$$\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \\ a_1 \geq 1, \quad 0 \leq a_i \leq 9 \quad (2 \leq i \leq n) \end{cases}$$

とするとき

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq r$$

となればよい。

- $r \leq 9$ であるから $a_i \leq 9$ は自動的に満たされるので

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq r \\ a_1 \geq 1, \quad a_i \geq 0 \quad (2 \leq i \leq n) \end{cases}$$

となる (a_1, a_2, \dots, a_n) の組の個数を求めればよい。

 (2) と同様に考えて、不等式ではなく等式に直して考える。

- $b = r - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ とおくと

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_n + b = r \\ a_1 \geq 1, \quad a_i \geq 0 \quad (2 \leq i \leq n), \quad b \geq 0 \end{cases}$$

- この両辺から 1 を引いて

$$\begin{cases} (a_1 - 1) + a_2 + \dots + a_n + b = r - 1 \\ a_1 - 1 \geq 0, \quad a_2 \geq 0, \dots, \quad a_n \geq 0, \quad b \geq 0 \end{cases}$$

なる整数の組 $(a_1 - 1, a_2, \dots, a_n, b)$ の個数を求めればよいので

$r - 1$ 個の \circ と n 本の $|$ を一列に並べる並べ方を考えて ${}_{r-1+n}C_n =$

$\frac{(r-1+n)!}{(r-1)!n!} \text{ 個}$
