

(問題 1)

先頭車両から順に 1 から n までの番号のついた n 両編成の列車がある。但し $n \geq 2$ とする。各車両を赤色, 青色, 黄色のいずれか一色で塗るとき, 隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りか。

(京都大・理系)

✎ 直接数え上げるのが困難なときは, 漸化式を立てて解く。

最初の一手, または最後の一手で場合分けして漸化式を作る。

- n 両編成の列車を題意を満たすように塗る塗り方が a_n 通りあるとする。
 a_{n+2} を考える。先頭の色で場合を分ける。

Case 1. 先頭が赤色のとき

- 2 両目は何色でも良い。
- 2 両目から $n+2$ 両目までの $n+1$ 両を, 題意を満たすようにどのように塗っても構わない。そのような塗り方は, 全部で a_{n+1} 通りある。

Case 2. 先頭が青色または黄色のとき

- 2 両目は必ず赤色でなければならない。
- 3 両目は何色でもよい。
- 3 両目から $n+2$ 両目までの n 両を題意を満たすように塗る塗り方は a_n 通りある。1 両目が青と黄色の 2 種類あることを考えると, この場合の塗り方は全部で $2a_n$ 通りある。

✎ Case 1, Case 2 をあわせて漸化式を作る。

- Case 1, Case 2 より, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \cdots \textcircled{1}$ ($n \geq 2$) となる。

✎ 初期条件を調べる。

- $n = 2$ のときの塗り方は

●●, ●○, ●△, ○●, △●

の 5 通りであるから $a_2 = 5$

- $n = 3$ のときの塗り方は

●●●, ●○●, ●△●, ○●●, △●●, ●●○,
●●△, ○●○, ○●△, △●△, △●○

の 11 通りであるから $a_3 = 11$

- ① $a_2 = 5, a_3 = 11$ の初期条件のもとで ① を解く。
特性方程式の解を求め、① を式変形する。

- ① の特性方程式は $x^2 - x - 2 = 0$
これを解く。 $(x - 2)(x + 1) = 0$ であるから、その解は $x = 2, -1$
- ① を変形すると

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n) \cdots \textcircled{2}$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = -(a_{n+1} - 2a_n) \cdots \textcircled{3}$$

となる。

- ② より $\{a_{n+2} + a_{n+1}\}$ は公比 2 の等比数列であるから、

$$a_{n+1} + a_n = 2^{n-2}(a_3 + a_2) \cdots \textcircled{4}$$

- ③ より $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は公比 -1 の等比数列であるから、

$$a_{n+1} - 2a_n = (-1)^{n-2}(a_3 - 2a_2) \cdots \textcircled{5}$$

である。

- ② ④ と ⑤ から a_{n+1} を消去して a_n ($n \geq 2$) を求める。
後で、 $a_2 = 5, a_3 = 11$ を代入する。

- $\frac{\textcircled{4} - \textcircled{5}}{3}$ より

$$a_n = \frac{1}{3} \{2^{n-2}(a_3 + a_2) + (-1)^{n-1}(a_3 - 2a_2)\} \cdots \textcircled{6}$$

となる。

- ⑥ に $a_2 = 5$, $a_3 = 11$ を代入すると,

$$a_n = \frac{1}{3} \{2^{n-2}16 + (-1)^{n-1}\} = \boxed{\frac{1}{3} \{2^{n+2} + (-1)^{n-1}\}}$$

STCO LIBRARY