

(問題 5)

2 次の正方行列 $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ を

$$A_0 = O, \quad A_n = B + A_{n-1}C \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$


で定める。但し、 O は 2 次の零行列、 B と C は 2 次の正方行列とする。

(1) $A_n(E - C)$ を B と C を用いて表せ。ここで E は 2 次の単位行列とする。

(2) B と C を $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき、 A_{3n} を求めよ。

(大阪大・理系)

(1)

 まず、 $A_n(E - C) = A_n - A_nC$ の形を作るために、問題文の漸化式に C を掛けて辺々を引く。
後は、数列の漸化式の解法の真似。

• $A_n = B + A_{n-1}C \dots$ ①の両辺に、右から C を掛けると $A_nC = BC + A_{n-1}C^2 \dots$ ②となる。

① - ② より

$$A_n - A_nC = B - BC + A_{n-1}C - A_{n-1}C^2$$

B を左辺に移行し、右辺の残りは C でくくる

$$A_n - A_nC - B = \{A_{n-1} - A_{n-1}C - B\}C$$

両辺において、それぞれ A_n, A_{n-1} でくくる

$$A_n(E - C) - B = \{A_{n-1}(E - C) - B\}C$$

$X_n = A_n(E - C) - B$ とおくと、 $X_n = X_{n-1}C$ となるから、 $X_n = X_0C^n$ となる。よって

$$A_n(E - C) - B = \{A_0(E - C) - B\}C^n$$

ここで、 $A_0 = O$ であるから

$$A_n(E - C) - B = -BC^n$$

従って

$$\boxed{A_n(E - C) = B(E - C^n)}$$

(2)

\triangleleft (1)の結果より, $A_{3n}(E - C) = B(E - C^{3n})$ である。

\triangleleft $E - C = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は逆行列をもつので, $A_{3n} = B(E - C^{3n})(E - C)^{-1}$ となる。

• (1)より, $A_{3n}(E - C) = B(E - C^{3n})$

ここで, $E - C = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ であるから, $(E - C)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dots \textcircled{1}$ となる。そ

して $A^{3n} = B(E - C^{3n})(E - C)^{-1} \dots \textcircled{2}$

\triangleleft C^{3n} を計算して代入すれば, A^{3n} が求まる。そのために Cayley-Hamilton の定理を利用する。

• $\text{tr} C = 2$, $\det A = 4$ であるから, Cayley-Hamilton の定理より $C^2 - 2C + 4E = O$ となる。

\triangleleft 多項式の展開 $(x+2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 8$ から類推して式変形する。

• $C^2 - 2C + 4E = O$ の両辺に $C + 2E$ を掛けると

$$(C + 2E)(C^2 - 2C + 4E) = O \quad \text{つまり} \quad C^3 + 8E = O$$

となるから, $C^3 = -8E$ であり, 従って $C^{3n} = (-8)^n E \dots \textcircled{3}$ である。

• ① ③を ②に代入して計算すると

$$A^{3n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \{E - (-8)^n E\} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\frac{1 - (-8)^n}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$$