

(問題 4)

2行2列の行列 A が $A^2 = -A$ を満たしている。また行列 A で表される移動により、座標平面上のすべての点がある直線 ℓ 上に移され、特に点 $(1, 1)$ は点 $(1, 2)$ に移される。

- (1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。次に行列 A を求めよ。
- (2) 行列 A で表される移動によって、円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点は直線 ℓ のどのような部分に移されるか述べよ。

(三重大・工)

(1)

☞ $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから、 A によって原点は必ず原点に移される。

☞ 平面上のすべての点が ℓ 上に移されるので、原点も $(1, 1)$ も ℓ 上の点に移される。

- 原点の像である原点は ℓ 上にある。つまり ℓ は原点を通る。

$(1, 1)$ の像 $(1, 2)$ も ℓ 上にある。

従って ℓ は原点と $(1, 2)$ を通る直線であるから、 $\ell : y = 2x$

☞ A を求めるには、 A による2点の像を利用するのが便利。

• $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$... ①であるが、 $A^2 = -A$ であるから、 $A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ここへ ① を代入すると $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ よって $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ となるから

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

(2)

☞ 円上の点をパラメタ表示して A による像を調べる。

- 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点は $(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) と書ける。

• A による像を (x, y) とすると,
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cos \theta - 2 \sin \theta \\ 6 \cos \theta - 4 \sin \theta \end{pmatrix}$$

よって
$$\begin{cases} x = 3 \cos \theta - 2 \sin \theta \\ y = 6 \cos \theta - 4 \sin \theta \end{cases}$$

 (x, y) は直線 l 上にあるから, x のとり得る値の範囲を調べればよい。

• $x = 3 \cos \theta - 2 \sin \theta = \sqrt{13} \sin(\theta + \alpha)$ 。但し, $\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$

ここで θ が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ を動くので, x は $-\sqrt{13} \leq x \leq \sqrt{13}$ を動く。

以上より, 直線 l のうちの $\boxed{-\sqrt{13} \leq x \leq \sqrt{13}}$ の部分に移される。