

(問題 3)

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、次の問に答えよ。

- (1) A で表される移動によって第 1 象限の点は第 1 象限に移り、かつ第 2 象限の点は第 2 象限に移るための必要十分条件を求めよ。但し、第 1 象限とは $x > 0$ かつ $y > 0$ で定められる領域であり、第 2 象限とは $x < 0$ かつ $y > 0$ で定められる領域である。
- (2) (1) の条件を満たす A で表される移動によって点 (x, y) が点 (u, v) に移ったとき常に $uv = 2xy$ が成り立ち、点 $P(1, 1)$ が Q に移ったときに $\triangle OPQ$ の面積が 4 になる。このとき A を求めよ。但し、 O は原点とする。

(お茶の水大・理)

(1)

☞ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の像を考える。

$$\bullet \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{ であるから}$$

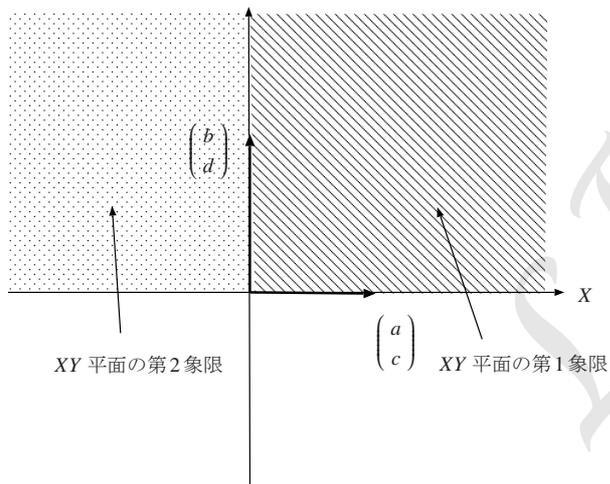
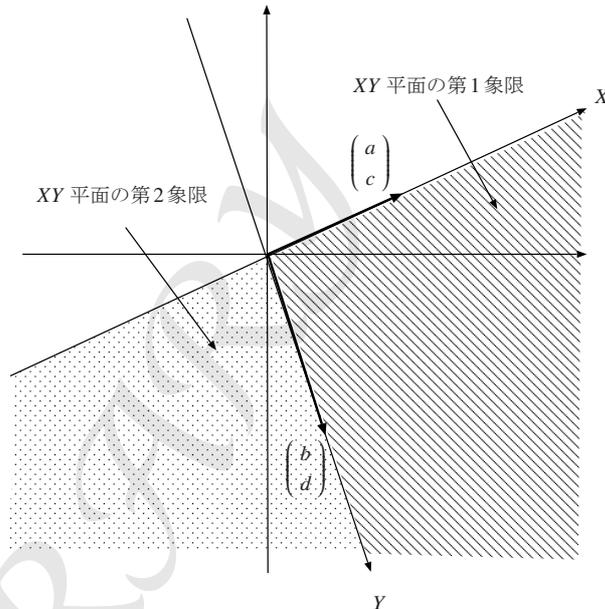
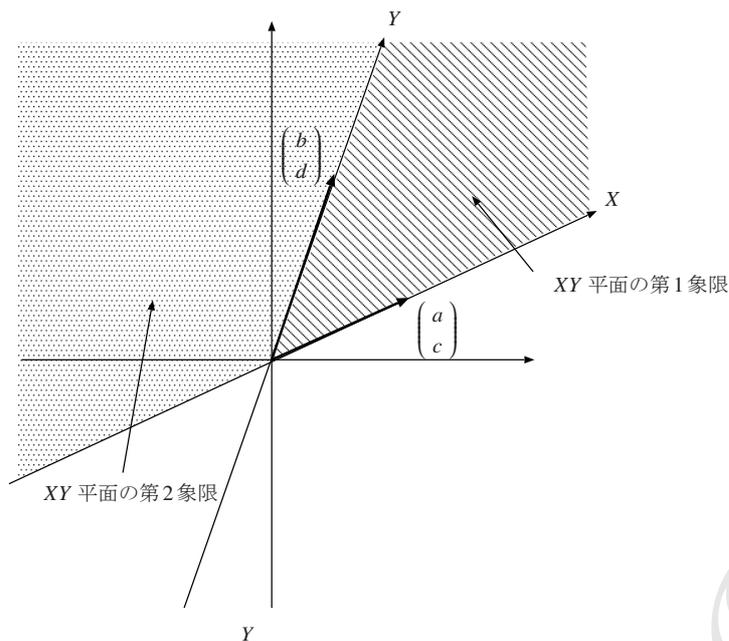
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = xA \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yA \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{ となり,}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdots \textcircled{1} \text{ である。}$$

☞ $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ を基準とする XY 斜交座標系で考えるとき、点 P の XY 座標を xy 座標と区別して、 $P < X, Y >$ と書くことにする。

☞ $\textcircled{1}$ は、点 $P(x, y)$ の像を P' とすると、 $P' < x, y >$ となることを意味している。従って、 P が xy 平面の第 1 象限内の点ならその像である P' は XY 平面の第 1 象限内の点であり、 P が xy 平面の第 2 象限内の点ならその像である P' は XY 平面の第 2 象限内の点である。

☞ 従って、求めるべき条件は XY 平面の第 1 象限が xy 平面の第 1 象限に含まれ、 XY 平面の第 2 象限が xy 平面の第 2 象限に含まれるための条件である。



- ①より, $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ を基準とする XY 座標を考えると, A によって, xy 平面の第1象限は XY 平面の第1象限に移り, xy 平面の第2象限は XY 平面の第2象限に移る。
- XY 平面の第1象限が xy 平面の第1象限内にあり, かつ XY 平面の第2象限が xy 平面の第2象限内にあるための条件は, 図より $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ において $a > 0$ かつ $c = 0$ であり, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ において $b = 0$ かつ $d > 0$ となることである。従って, 求めるべき必要十分条件は, $\boxed{a > 0, b = c = 0, d > 0}$

(2)

 (1)より, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ ($a > 0, d > 0$) これを利用して実際に (x, y) の像を計算する。

- (1)より $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ ($a > 0, d > 0$) であるから $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となり, $u = ax, v = dy$ である。
- 従って, $uv = 2xy$ となるための条件は, $adxy = 2xy$ つまり $xy(ad - 2) = 0$ である。これがすべての実数 x, y についてつねに成り立つための条件は, $ad = 2 \dots \textcircled{1}$

 Qの座標を計算し, 三角形の面積が4であることを使う。

- $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$ であるから, $Q(a, d)$ となる。
- $P(1, 1), Q(a, d)$ であるから $\triangle OPQ$ の面積は $\frac{|a-d|}{2}$ である。これが4に等しいので, $|a-d| = 8 \dots \textcircled{2}$

 $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ と $a > 0, d > 0$ より a, d を求める。そのために $a+d$ の値を調べる。 $ad, a+d$ の値が分かれば, a, d は2次方程式の解として得られる。

- $\textcircled{2}$ より $(a-d)^2 = 64$ つまり $a^2 - 2ad + d^2 = 64$ となるから, これを変形すると $(a+d)^2 - 4ad = 64$ となる。ここへ $\textcircled{1}$ を代入すると $(a+d)^2 = 72$ となり, $a+d = \pm 6\sqrt{2}$ である。しかし, 今の場合 $a > 0, d > 0$ であるから, $a+d = 6\sqrt{2} \dots \textcircled{3}$ となる。
- $\textcircled{1}$ と $\textcircled{3}$ より, a, d は2次方程式 $x^2 - 6\sqrt{2}x + 2 = 0$ の2解である。これを解くと $x = 3\sqrt{2} \pm \sqrt{18-2} = 3\sqrt{2} \pm 4$ となる。よって, $(a, d) = (3\sqrt{2} \pm 4, 3\sqrt{2} \mp 4)$ である。

以上より, $A = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \pm 4 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} \mp 4 \end{pmatrix}$ (複号同順)