

(問題 2)

実数を成分にもつ行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 r, s が下の条件 (i), (ii), (iii) を満たすとする。

(i) $s > 1$

(ii) $A \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, \dots$) とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

このとき, 以下の問に答えよ。

(1) $B = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を a, c, r, s を用いて表せ。

(2) $B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, \dots$) とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ を示せ。

(3) $c = 0$ かつ $|a| < 1$ を示せ。

(東京大・理系)

(1)

 (行列は 2 点の像で決まる)

$$\left\{ \begin{array}{l} A \begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \\ \text{かつ} \\ A \begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \end{array} \right. \iff A \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$ を計算してから $A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を求める。

$$\left| \begin{array}{l} \bullet A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ であるから } A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \dots \textcircled{1} \\ \bullet \text{ 条件 (ii) より } A \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sr \\ s \end{pmatrix} \dots \textcircled{2} \text{ である。} \end{array} \right.$$

- ① ② より

$$A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & sr \\ c & s \end{pmatrix}$$

であるから、両辺に左から $\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ を掛けて

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & sr \\ c & s \end{pmatrix}$$

ここで $\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & sr \\ c & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-cr & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$$

- $B = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるから, $B = \begin{pmatrix} a-cr & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$

(2)

 $B = P^{-1}AP$ であるから

$B^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) = P^{-1}APP^{-1}AP\cdots P^{-1}AP = P^{-1}AA\cdots AP = P^{-1}A^nP$ となる。

- $B^n = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A^n \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるから, $B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A^n \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ここで $\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから, $B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。

- $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ であり, $\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるから,

$$\begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n - ry_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

である。

- 従って, $z_n = x_n - ry_n$, $w_n = y_n$ となるが, 条件 (iii) より $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ であるか

ら $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ となる。

(3)

✎ (1)より B は $\begin{pmatrix} p & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$ の形なので Cayley-Hamilton の定理を用いて B^n が計算できる。

• (1)より $B = \begin{pmatrix} a-cr & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$ であるから, $p = a-cr \dots \textcircled{1}$ とおくと $B = \begin{pmatrix} p & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$ である。

• $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ c & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり, $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

つまり $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に B を 1 回掛ける毎に $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は s 倍されるので, n 回掛けると s^n 倍され,

$B^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dots \textcircled{2}$ となる。

✎ 上の議論で $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が B の固有ベクトルと分かったが, もうひとつ B の固有ベクトルを見つける。そのために Cayley-Hamilton の定理を利用する。

• $\text{tr } B = p + s, \det B = ps$ であるから Cayley-Hamilton の定理より

$$B^2 - (p+s)B + psE = O$$

従って $(B - pE)(B - sE) = O$ となるので

$$(B - pE) \begin{pmatrix} p-s & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = O$$

よって $(B - pE) \begin{pmatrix} p-s \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり $B \begin{pmatrix} p-s \\ c \end{pmatrix} - p \begin{pmatrix} p-s \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{従って } B \begin{pmatrix} p-s \\ c \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} p-s \\ c \end{pmatrix}$$

• $\begin{pmatrix} p-s \\ c \end{pmatrix}$ に B を 1 回掛ける毎に p 倍されるので, n 回掛けると p^n 倍される。よって

$$B^n \begin{pmatrix} p-s \\ c \end{pmatrix} = p^n \begin{pmatrix} p-s \\ c \end{pmatrix} \dots \textcircled{3}$$

☞ $\begin{pmatrix} p-s \\ c \end{pmatrix} = (p-s) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり, $B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}$, $B^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となることを利用して $B^n \begin{pmatrix} p-s \\ c \end{pmatrix}$ を計算し ③ の結果と比較する。

$$\begin{aligned} \bullet \quad B^n \begin{pmatrix} p-s \\ c \end{pmatrix} &= B^n \left\{ (p-s) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= (p-s) B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c B^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで $B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}$ であり, また ② より $B^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから

$$= (p-s) \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} + c s^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } B^n \begin{pmatrix} p-s \\ c \end{pmatrix} = (p-s) \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} + c s^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dots \textcircled{4}$$

• ③ と ④ より

$$p^n \begin{pmatrix} p-s \\ c \end{pmatrix} = (p-s) \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} + c s^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{つまり} \quad \begin{cases} p^n(p-s) = (p-s)z_n \\ p^n c = (p-s)w_n + c s^n \end{cases} \dots \textcircled{5}$$

である。

☞ まず $p \neq s$ を示して ⑤ より $p^n = z_n$ を導く。

そのために, もし $p = s$ なら $B = \begin{pmatrix} s & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$ となり, 従って $B^n = \begin{pmatrix} s^n & 0 \\ n s^{n-1} c & s^n \end{pmatrix}$ となることを示し, ことから矛盾を導く。

$$\bullet \quad \text{もし } p = s \text{ なら, } B = \begin{pmatrix} s & 0 \\ c & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = sE + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• E と $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は積が交換可能であって, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = O$ であるから, 二項展開を考え

ると

$$B^n = \left\{ sE + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}^n = s^n E + ns^{n-1}c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^n & 0 \\ ns^{n-1}c & s^n \end{pmatrix} \text{となる。}$$

- そうすると $B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^n & 0 \\ ns^{n-1}c & s^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^n \\ ns^{n-1}c \end{pmatrix}$ が、 $B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}$ であるから、 $s^n = z_n$ となる。しかし、仮定より $s > 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} s^n = \infty$ となる。これは (2) の結果 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ に反して矛盾である。よって、 $p \neq s$ である。

 $p \neq s$ を用いて ⑤ を変形し ③ と比較する。

- $p \neq s$ であるから ⑤ より

$$p^n = z_n \cdots \textcircled{6} \quad p^n c = (p-s)w_n + cs^n \cdots \textcircled{7}$$

となる。ここで (2) の結果より $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ である。

よって ⑥ より $\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0 \cdots \textcircled{8}$ となる。

- そうすると ⑦ の両辺で $n \rightarrow \infty$ とすると $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} cs^n$ となる。ここで $s > 1$ であるから $c = 0$ でなければならない。実際、もし $c > 0$ なら $\lim_{n \rightarrow \infty} cs^n = \infty$ 、 $c < 0$ なら $\lim_{n \rightarrow \infty} cs^n = -\infty$ となってしまう。
- ① より $p = a - cr$ だが今 $c = 0$ であるから $p = a$ である。よって ⑧ は $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ となる。従って、 $|a| < 1$ である。
- 以上で $c = 0$ かつ $|a| < 1$ が示された。