

(問題 1)

実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - A + E = O$ を満たすとき、以下の間に答えよ。但し、 E は単位行列、 O は零行列である。

- (1) A は逆行列をもつことを示せ。
- (2) $a + d$ と $ad - bc$ の値を求めよ。
- (3) $b > 0$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ のとき、 A を求めよ。

(北海道大・理系)

(1)

 X が Y の逆行列であるとは、 $XY = YX = E$ が成り立つことである。この定義に基づいて A が逆行列をもつことを示す。

• $A^2 - A + E = O$ より $E = A - A^2$ であるから

$$E = A(E - A) = (E - A)A$$

となる。従って、 A は逆行列をもち、 $A^{-1} = E - A$ である。

(2)

 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $\text{tr} A = a + d$, $\det A = ad - bc$ と約束する。

 (Cayley-Hamilton の定理)

A を 2 次正方行列とするとき
 $A^2 - (\text{tr} A)A + (\det A)E = O$ である。

を使う。

 一般には Cayley-Hamilton の定理の逆は成立しない。つまり、 $A^2 - pA + qE = O$ であっても $p = \text{tr} A$, $q = \det A$ とは限らない。しかし、 $A \neq kE$ のときは、逆も成立するので最初から $A = kE$ であるか否かで場合分けをすれば考えやすい。

$$A^2 - A + E = O \dots \textcircled{1}$$

Case 1. $A = kE$ のとき

• $A = kE$ を ① に代入すると $k^2E - kE + E = O$ つまり $(k^2 - k + 1)E = O$ となる。従って

$k^2 - k + 1 = 0$ であるが、これを満たす実数 k は存在しない。

Case 2. $A \neq kE$ のとき

- $\tau = \text{tr}A$, $\delta = \det A$ とおくと, Cayley-Hamilton の定理より $A^2 - \tau A + \delta E = O \cdots \textcircled{2}$ である。
- $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より, $(\tau - 1)A + (1 - \delta)E = O$ ここでもし, $\tau \neq 1$ とすると, $A = \frac{\delta - 1}{\tau - 1}E$ となり Case 2 の仮定に反する。よって $\tau = 1$ である。そうすると $(1 - \delta)E = O$ であるから $\delta = 1$ となる。
- 以上で, $\text{tr}A = \tau = 1$, $\det A = \delta = 1$ である。 $\boxed{a + d = 1, \quad ad - bc = 1}$

(3)

 (逆行列の存在条件および逆行列の公式)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{が逆行列をもつための条件は } ad - bc \neq 0 \text{ で,}$$

$$\text{このとき } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

 (2) の結果と逆行列の公式を利用して連立方程式を作って解く。

- (2) より $a + d = 1 \cdots \textcircled{1}$, $ad - bc = 1 \cdots \textcircled{2}$
- $ad - bc = 1$ であるから $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 逆行列は $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ である。これが $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ と一致するので, $a = d \cdots \textcircled{3}$, $b = -c \cdots \textcircled{4}$
- $\textcircled{1}$ $\textcircled{3}$ より $a = d = \frac{1}{2}$
- $\textcircled{2}$ に $a = d = \frac{1}{2}$ を代入すると, $bc = -\frac{3}{4}$ ここへ $\textcircled{4}$ を代入すると $b^2 = \frac{3}{4}$ となるが, $b > 0$ であるから $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。そうすると $\textcircled{4}$ より $c = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 以上より, $\boxed{A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}}$

【注】 逆行列の公式を使わず, (1) より $A^{-1} = E - A$ となることを利用してもよい。

$$E - A = \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & 1-d \end{pmatrix} \text{であるから} \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & 1-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{となり}$$

$$1-a=a, \quad -b=c, \quad -c=b, \quad 1-d=d$$

つまり $a=d=\frac{1}{2}$, $b=-c$ を得る。

STCO LIBRARY