

(問題 5)

曲線 $y = e^x$ 上を動く点 P の時刻 t における座標を $(x(t), y(t))$ と表し、 P の速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ と $\vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right)$ とする。すべての時刻 t で $|\vec{v}| = 1$ かつ $\frac{dx}{dt} > 0$ であるとして、次の間に答えよ。

- (1) P が点 (s, e^s) を通過する時刻における速度ベクトル \vec{v} を s を用いて表せ。
- (2) P が点 (s, e^s) を通過する時刻における加速度ベクトル \vec{a} を s を用いて表せ。
- (3) P が曲線全体を動くとき、 $|\vec{a}|$ の最大値を求めよ。

(九州大・理系)

(1)

 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ を計算するために、合成関数の微分公式を利用して $y = e^x$ の両辺を t で微分する。

- y も x も t の関数と見て $y = e^x$ を t で微分すると $\frac{dy}{dt} = e^x \frac{dx}{dt}$ となる。よって、

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, e^x \frac{dx}{dt} \right) = \frac{dx}{dt} (1, e^x) \dots \textcircled{1}$$
- 仮定より $\frac{dx}{dt} > 0$ であるから $|\vec{v}| = \frac{dx}{dt} \sqrt{1 + e^{2x}} \dots \textcircled{2}$ となる。

 $\frac{dx}{dt}$ を求めるために、 $|\vec{v}| = 1$ という仮定を使う。

- $|\vec{v}| = 1$ であるから、 $\textcircled{2}$ より $\frac{dx}{dt} \sqrt{1 + e^{2x}} = 1$ となり、 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$ となる。
- これを $\textcircled{1}$ に代入すると $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2s}}} (1, e^s)$

従って $x = s$ となるときの速度ベクトルは、
$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 + e^{2s}}}, \frac{e^s}{\sqrt{1 + e^{2s}}} \right)$$

(2)

④ $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$ を計算する。

(1) より $\frac{dy}{dt} = e^x \frac{dx}{dt}$ であるから、この両辺を更に t で微分すれば $\frac{d^2y}{dt^2}$ が分かる。

- (1) より, $\frac{dy}{dt} = e^x \frac{dx}{dt}$ である。この両辺 t で微分する。積の微分公式および合成関数の微分公式を用いると $\frac{d^2y}{dt^2} = e^x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + e^x \frac{d^2x}{dt^2} \dots \textcircled{1}$

④ $\frac{d^2x}{dt^2}$ を求めるために, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ つまり $\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{1+e^{2x}}$ であることを利用する。この両辺を t で微分すれば $\frac{d^2x}{dt^2}$ が求まる。

- (1) で見たように, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ つまり $\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{1+e^{2x}} \dots \textcircled{2}$ である。

② の両辺を t で微分すると, $2 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} \cdot \frac{dx}{dt}$ となるが, $\frac{dx}{dt} \neq 0$ であるから, 両辺を $\frac{dx}{dt}$ で割ると $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} \dots \textcircled{3}$ となる。

- ② ③ を ① へ代入すると $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{e^x e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2} \dots \textcircled{4}$

- ③ ④ より, $x = s$ となるときにの加速度ベクトルは, $\left(-\frac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^2}, \frac{e^s}{(1+e^{2s})^2} \right)$

(3)

④ (2) より, $x = s$ のとき $\vec{\alpha} = \left(-\frac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^2}, \frac{e^s}{(1+e^{2s})^2} \right)$ であるから, これより s がすべての実数を動くときの $|\vec{\alpha}|$ の最大値を求める。

- (2) より $\vec{\alpha} = \left(-\frac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^2}, \frac{e^s}{(1+e^{2s})^2} \right) = \frac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^2} (-1, e^{-s})$ である。よって

$$|\vec{\alpha}| = \frac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^2} \sqrt{1+e^{-2s}}$$

すべてを $\sqrt{\quad}$ の中に入れると

$$= \sqrt{\frac{e^{4s}}{(1+e^{2s})^4} \cdot (1+e^{-2s})}$$

$e^{4s}(1+e^{-2s}) = e^{4s} + e^{2s} = e^{2s}(e^{2s} + 1)$ となるから

$$= \sqrt{\frac{e^{2s}(e^{2s} + 1)}{(1+e^{2s})^4}}$$

$$= \sqrt{\frac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^3}}$$

 $t = e^{2s}$ とおくと、 s がすべての実数を動くとき t は $t > 0$ を動き $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\frac{t}{(1+t)^3}}$ となる。従って、 $g(t) = \frac{t}{(1+t)^3}$ の $t > 0$ での最大値を求めればよい。

- $t = e^{2s}$ おくと s がすべての実数を動くとき、 t は $t > 0$ を動き、 $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\frac{t}{(1+t)^3}}$ となる。よって $g(t) = \frac{t}{(1+t)^3}$ とおくと $|\vec{\alpha}| = \sqrt{g(t)}$ である。
- $g(t) = \frac{t}{(1+t)^3}$ ($t > 0$) の増減を調べる。 $g'(t) = \frac{(1+t)^3 - t \cdot 3(1+t)^2}{(1+t)^6} = \frac{1-2t}{(1+t)^4}$

増減表は、

t	0	$\frac{1}{2}$	
$g'(t)$		+	-
$g(t)$		\nearrow	\searrow

となるから $t = \frac{1}{2}$ のとき $g(t)$ は最大値 $\frac{4}{27}$

をとる。

- $|\vec{\alpha}| = \sqrt{g(t)}$ であるから $|\vec{\alpha}|$ の最大値は、 $\sqrt{\frac{4}{27}} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$