

(問題 4)

$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ とおく。但し、 e は自然対数の底とする。

(1) $y = f(x)$ の増減, 凹凸, 漸近線を調べ, グラフを描け。

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f^{-1} \left(\frac{1}{n+2} \right) - f^{-1} \left(\frac{1}{n+1} \right) \right\}$ を求めよ。

(九州大・理系)

(1)

 $f'(x), f''(x)$ を計算して増減表・凹凸表を作る。

• 商の微分公式より, $f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

よって, つねに $f'(x) > 0$ となり $f(x)$ は単調増加である。

• $f'(x)$ を更に x で微分すると

$f''(x) = \frac{e^x(e^x + 1)^2 - e^x 2(e^x + 1)e^x}{(e^x + 1)^4} = \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$ よって, 凹凸表は次の通り。

x		0	
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	∪	$\frac{1}{2}$	∩

変曲点は, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

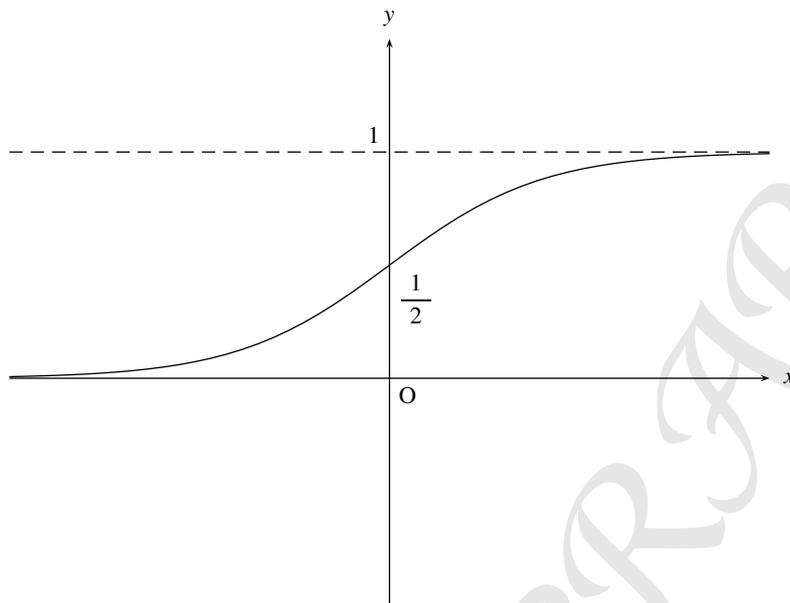
 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ を調べる。

• $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{0}{0 + 1} = 0$

従って, $x \rightarrow \infty$ での漸近線は $y = 1$. $x \rightarrow -\infty$ での漸近線は $y = 0$ である。

• 以上より, グラフは次のようになる。



(2)

① (1) より $f(x)$ は単調増加で 1:1 対応であるから逆関数をもつ。

② f の逆関数 f^{-1} とは f の逆の対応のことである。 $y = f(x)$ から逆に x を y で表せば $x = f^{-1}(y)$ となり、 $y = f^{-1}(x)$ から逆に x を y で表せば $x = f(y)$ となる。つまり

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y), \quad y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$$

である。

③ $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ を逆に解いて x を y で表せば $x = f^{-1}(y)$ が得られる。

• $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ …①とすると、(1) より $0 < y < 1$ である。

• ① から x を逆に y で表す。 $(1-y)e^x = y$ であるが、 $y \neq 1$ であるから $e^x = \frac{y}{1-y}$ よって、 $x = \log \frac{y}{1-y}$ となり $f^{-1}(y) = \log \frac{y}{1-y}$ である。

• 変数を x に変えて、 $f^{-1}(x) = \log \frac{x}{1-x} \quad (0 < x < 1)$

(3)

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f^{-1} \left(\frac{1}{n+2} \right) - f^{-1} \left(\frac{1}{n+1} \right) \right\} \text{ を求める。}$$

 $f^{-1}(x) = \log \frac{x}{1-x}$ に $x = \frac{1}{n+2}$, $\frac{1}{n+1}$ を代入して式変形する。

$$\bullet f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) = \log \frac{\frac{1}{n+2}}{1 - \frac{1}{n+2}} = \log \frac{1}{n+1}$$

$$f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) = \log \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \log \frac{1}{n}$$

• 従って

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\log \frac{1}{n+1} - \log \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

e の定義式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ が使えるように、真数の分母分子を n で割る

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

対数の n 倍を真数の n 乗にする

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \log \frac{1}{e}$$

$$= -\log e$$

となり、 $L = \boxed{-1}$ である。