

## (問題 3)

- (1)  $e^x - 1 - xe^{\frac{x}{2}} > 0$  を満たす  $x$  の範囲を求めよ。
- (2)  $x \neq 0$  のとき,  $\frac{e^x - 1}{x}$  と  $e^{\frac{x}{2}}$  の大小を調べよ。
- (3)  $p$  を  $0 < p < 1$  である定数とする。  $x > 0, x \neq 1$  のとき  $\frac{x^p - 1}{x - 1}$  と  $px^{\frac{p-1}{2}}$  の大小を調べよ。

(山形大・理, 医)

## (1)

  $e^x - 1 - xe^{\frac{x}{2}}$  の増減は調べにくいので, 同値変形して調べやすい形にしてから考える。

  $e^x - 1 - xe^{\frac{x}{2}} > 0 \iff e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x > 0$  に注意する。

- つねに  $e^{\frac{x}{2}} > 0$  であるから, 両辺を  $e^{\frac{x}{2}}$  で割って考えると  

$$e^x - 1 - xe^{\frac{x}{2}} > 0 \iff e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x > 0$$
 である。そこで  $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x$  とおく。

  $f(x)$  の増減を調べて,  $f(x) > 0$  なる  $x$  の範囲を求めればよい。

- $$f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 1 = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} - 2 + e^{-\frac{x}{2}}) = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}})^2 = \frac{1}{2}\left\{e^{-\frac{x}{4}}(e^{\frac{x}{2}} - 1)\right\}^2$$
 であるから, 増減表は次の通り。

$x$		0	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	0	↗

- 増減表より,  $f(x) > 0$  となる  $x$  の範囲を求めると,  $\boxed{x > 0}$

## (2)

 (1) の増減表より,

$x > 0$  のとき  $e^x - 1 - xe^{\frac{x}{2}} > 0$ ,  $x < 0$  のとき  $e^x - 1 - xe^{\frac{x}{2}} < 0$   
 と分かっている。この辺々を  $x$  で割ればよい。

 負の数で割ると不等号が逆転することに注意する。

- (1)の結果より、 $x > 0$  のとき、 $e^x - 1 - xe^{\frac{x}{2}} > 0$  であるから、両辺を  $x (> 0)$  で割ると、 $\frac{e^x - 1}{x} - e^{\frac{x}{2}} > 0$  つまり  $\frac{e^x - 1}{x} > e^{\frac{x}{2}}$  となる。
- (1)で作った増減表より、 $x < 0$  のときは  $e^x - 1 - xe^{\frac{x}{2}} < 0$  である。この両辺を  $x (< 0)$  で割ると、不等号が逆転して、 $\frac{e^x - 1}{x} - e^{\frac{x}{2}} > 0$  つまり  $\frac{e^x - 1}{x} > e^{\frac{x}{2}}$  となる。
- 従って、いずれにせよ  $x \neq 0$  のとき  $\boxed{\frac{e^x - 1}{x} > e^{\frac{x}{2}}}$  となる。

(3)

  $\frac{x^p - 1}{x - 1} - px^{\frac{p-1}{2}}$  の符号を調べればよい。

(2)の結果ではなく、考え方を真似する。

  $\frac{x^p - 1}{x - 1} - px^{\frac{p-1}{2}}$  の分母を払った形にして  $x^p - 1 - p(x - 1)x^{\frac{p-1}{2}}$  を考える。

更に、 $x^{\frac{p-1}{2}}$  で割った形にして、 $x^{\frac{p+1}{2}} - x^{-\frac{p-1}{2}} - p(x - 1)$  を考える。

- $g(x) = x^{\frac{p+1}{2}} - x^{-\frac{p-1}{2}} - p(x - 1)$  ( $x > 0$ ) の増減を調べる。

$$g'(x) = \frac{p+1}{2}x^{\frac{p-1}{2}} + \frac{p-1}{2}x^{-\frac{p+1}{2}} - p$$

$g'(x)$  の符号が分かりにくいのでもう一度微分する

$$g''(x) = \frac{p^2 - 1}{4}x^{\frac{p-3}{2}} - \frac{p^2 - 1}{2}x^{-\frac{p+3}{2}} = \frac{p^2 - 1}{4}x^{-\frac{p+3}{2}}(x^p - 1)$$

- $0 < p < 1$  より  $\frac{p^2 - 1}{4} < 0$  である。また  $g'(1) = 0$  にも注意して、 $g'(x)$  の増減表は次の通り。

$x$	0	1	
$g''(x)$		+	0
$g'(x)$		↗	0
			↘

- そうすると  $x > 0, x \neq 1$  でつねに  $g'(x) < 0$  であり、また  $g'(1) = 0$  である。そして  $g(1) = 0$  にも注意すると、 $g(x)$  の増減表は次のようになる。

$x$	0		1	
$g'(x)$		-	0	-
$g(x)$		↘	0	↘

- 増減表より次が分かる。

$$0 < x < 1 \text{ のとき } x^{\frac{p+1}{2}} - x^{-\frac{p-1}{2}} - p(x-1) > 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$x > 1 \text{ のとき } x^{\frac{p+1}{2}} - x^{-\frac{p-1}{2}} - p(x-1) < 0 \cdots \textcircled{2}$$

- ① の両辺に  $\frac{x^{\frac{p-1}{2}}}{x-1}$  ( $< 0$ ) を掛けると不等号が逆転して、 $\frac{x^p - 1}{x-1} - px^{\frac{p-1}{2}} < 0$  となる。

- ② の両辺に  $\frac{x^{\frac{p-1}{2}}}{x-1}$  ( $> 0$ ) を掛けると、 $\frac{x^p - 1}{x-1} - px^{\frac{p-1}{2}} < 0$  となる。

- 以上、いずれにせよ  $\frac{x^p - 1}{x-1} - px^{\frac{p-1}{2}} < 0$  となるから、

$$\boxed{\frac{x^p - 1}{x-1} < px^{\frac{p-1}{2}}}$$