

(問題 2)

$f(x)$ はすべての実数 x において微分可能な関数で、関係式 $f(2x) = (e^x + 1)f(x)$ を満たしているとする。

(1) $f(0) = 0$ を示せ。

(2) $x \neq 0$ に対して $\frac{f(x)}{e^x - 1} = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{e^{\frac{x}{2}} - 1}$ が成り立つことを示せ。

(3) 微分係数の定義を用いて $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{e^h - 1}$ を示せ。

(4) $f(x) = (e^x - 1)f'(0)$ が成り立つことを示せ。

(早稲田大)

$$f(2x) = (e^x + 1)f(x) \cdots (*)$$

(1)

 (*) において $x = 0$ を代入する。

• (*) において、 $x = 0$ とすると、 $f(0) = 2f(0)$ となるから、 $f(0) = 0$ である。

(2)

 (*) において x を $\frac{x}{2}$ に置き換える。

• (*) において、 x を $\frac{x}{2}$ に置き換えると、 $f(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} + 1\right)f\left(\frac{x}{2}\right)$

• 両辺を $e^x - 1$ ($x \neq 0$) で割ると、 $\frac{f(x)}{e^x - 1} = \frac{\left(e^{\frac{x}{2}} + 1\right)f\left(\frac{x}{2}\right)}{e^x - 1}$ となるが、

$$\text{右辺を変形すると } \frac{f(x)}{e^x - 1} = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{e^x - 1}{e^{\frac{x}{2}} + 1}}$$

ここで $\frac{e^x - 1}{e^{\frac{x}{2}} + 1} = e^{\frac{x}{2}} - 1$ であるから $\frac{f(x)}{e^x - 1} = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{e^{\frac{x}{2}} - 1}$ が示された。

(3)

 微分係数 $f'(a)$ の定義は、 $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

 (1) の結果にも注意。

- $f(x)$ は $x = 0$ において微分可能であるから、
微分係数の定義より $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ である。
- (1) より、 $f(0) = 0$ であり、また $f(0+h) = f(h)$ であるから、 $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$ となる。

 $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{e^h - 1}$ を示すために、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ を利用する。

- $g(x) = e^x$ とおくと、 $g'(x) = e^x$ で $g'(0) = 1$ であるから、 $g(0) = e^0 = 1$ にも注意して
 $1 = g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$ となる。
- 従って、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{e^h - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \cdot \frac{h}{e^h - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \cdot \frac{1}{\frac{e^h - 1}{h}} = f'(0) \cdot 1 = f'(0)$
となり示された。

(4)

 (2) の結果に注目する。 $x \neq 0$ に対して、 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x - 1}$ とおくと $F(x) = F\left(\frac{x}{2}\right)$ である。

これを繰り返し用いると $F(x) = F\left(\frac{x}{2}\right) = F\left(\frac{x}{2^2}\right) = F\left(\frac{x}{2^3}\right) = \dots$ となる。

- まず、 $x = 0$ のときは (1) より $f(0) = 0$ である。一方、 $(e^0 - 1)f'(0) = 0$ であるから確かに $f(x) = (e^x - 1)f'(0)$ は成り立つ。
以下、 $x \neq 0$ のときに考える。
- $x \neq 0$ のとき、(2) より $\frac{f(x)}{e^x - 1} = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{e^{\frac{x}{2}} - 1}$ である。つまり x を $\frac{x}{2}$ に置き換えても式の値は変化しない。そこで、繰り返し x を $\frac{x}{2}$ に置き換えていくと、任意の自然数 n に

対してつねに $\frac{f(x)}{e^x - 1} = \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{e^{\frac{x}{2^n}} - 1}$ となる。

- (3) の結果を用いると $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{e^h - 1} = f'(0)$ である。

今、 $n \rightarrow \infty$ とすると $\frac{x}{2^n} \rightarrow 0$ であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{e^{\frac{x}{2^n}} - 1} = f'(0)$ となる。

- $\frac{f(x)}{e^x - 1}$ は n と無関係であることに注意して、

$\frac{f(x)}{e^x - 1} = \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{e^{\frac{x}{2^n}} - 1}$ において $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\frac{f(x)}{e^x - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{e^x - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{e^{\frac{x}{2^n}} - 1} = f'(0) \text{ となる。}$$

よって、 $f(x) = (e^x - 1)f'(0)$ である。