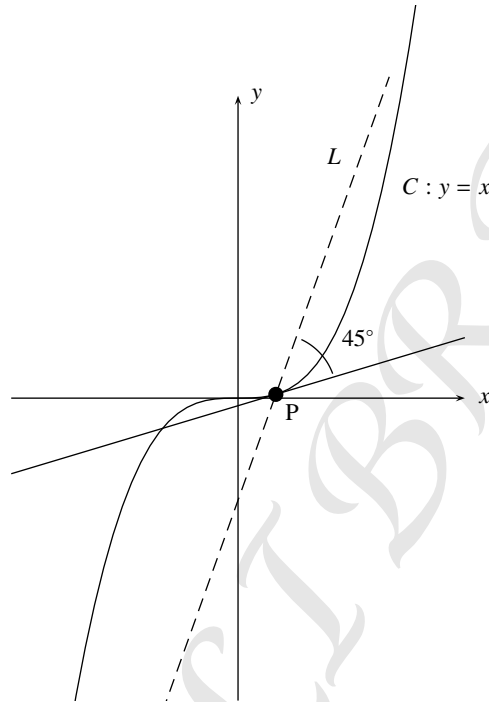



(問題 1)

xy 平面上の曲線 $C: y = x^3$ 上の点 P における接線を、点 P を中心にして反時計周りに 45° 回転して得られる直線を L とする。 C と L が、相異なる 3 点で交わるような点 P の範囲を図示せよ。

(京都大・理系)



 まず、 C 上の点 $P(t, t^3)$ を通る傾き m の直線 $l: y = m(x-t) + t^3$ が C と異なる 3 点で交わるための条件を求める。 L を 45° 回転した直線がこの条件を満たせばよい。

- C 上の点 $P(t, t^3)$ を通る傾き m の直線 $l: y = m(x-t) + t^3$ の方程式と $C: y = x^3$ の方程式を連立して

$$x^3 = m(x-t) + t^3$$

すべてを右辺に移項して $x-t$ でくくると

$$(x-t)(x^2 + tx + t^2 - m) = 0$$

である。

- C と l が異なる 3 点で交わるのは、 $(x-t)(x^2 + tx + t^2 - m) = 0$ が相異 3 実解を持つときであるが、これは $x = t$ を必ず解に持つので

$$x^2 + tx + t^2 - m = 0 \cdots \textcircled{1}$$

が t 以外の相異 2 実解をもてばよい。

 $\textcircled{1}$ が $x \neq t$ なる相異 2 実解を持つための条件を求める。

- まず $\textcircled{1}$ は $x = t$ を解としないので、 $t^2 + t^2 + t^2 - m \neq 0$ つまり $m \neq 3t^2$ である。
- $\textcircled{1}$ が相異 2 実解をもつことより、判別式をとって $D = t^2 - 4(t^2 - m) > 0$ つまり $m > \frac{3}{4}t^2$ となる。
- よって $\textcircled{1}$ が $x \neq t$ なる相異 2 実解を持つための条件、つまり C と $l: y = m(x - t) + t^3$ が異なる 3 点で交わるための条件は

$$m > \frac{3}{4}t^2 \quad \text{かつ} \quad m \neq 3t^2 \cdots \textcircled{2}$$

である。

 $P(t, t^3)$ における接線 L を 45° 回転した直線の傾きを求め、 $\textcircled{2}$ を満たすことより t の値の範囲を求める。

 接線の方向ベクトルを 45° 回転して L の方向ベクトルを求める。

- $P(t, t^3)$ とすると、 P における接線の方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$ であるから、これを 45° 回

$$\text{転した } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - 3t^2 \\ 1 + 3t^2 \end{pmatrix} \text{ が } L \text{ の方向ベクトルである。}$$

- L が y 軸に平行なとき、 C と L が異なる 3 点で交わることはないので、 $1 - 3t^2 \neq 0$ つまり $t \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \cdots \textcircled{3}$ であって、 L の傾きは $\frac{1 + 3t^2}{1 - 3t^2}$ となる。
- L の傾き $m = \frac{1 + 3t^2}{1 - 3t^2}$ および t が $\textcircled{2}$ を満たすことより

$$\frac{1 + 3t^2}{1 - 3t^2} > \frac{3}{4}t^2 \cdots \textcircled{4} \quad \text{かつ} \quad \frac{1 + 3t^2}{1 - 3t^2} \neq 3t^2 \cdots \textcircled{5}$$

- $\textcircled{5}$ を書き直すと $9t^4 + 1 \neq 0$ ということだが、これは自動的に成り立つので、 $\textcircled{4}$ のみ満たせばよい。
- $\textcircled{4}$ において $t^2 \geq 0$ かつ $1 + 3t^2 > 0$ であるから $\textcircled{4}$ を言い換えると

$$1 - 3t^2 > 0 \quad \text{かつ} \quad 4(1 + 3t^2) > 3t^2(1 - 3t^2) \quad \text{つまり}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{かつ} \quad 9t^4 + 9t^2 + 4 > 0$$

となるが後者は自動的に成り立つので、 $-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}}$ が求めるべき条件となる。

これは ③ も満たす。

- 以上より、P の存在範囲は
$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

