

det の符号とベクトルのなす角

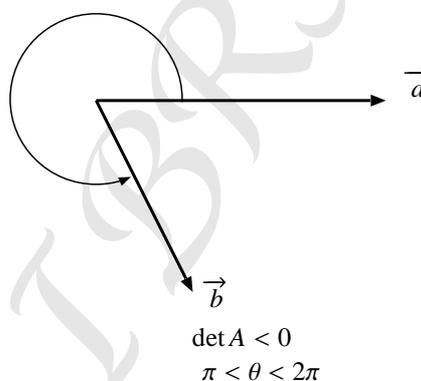
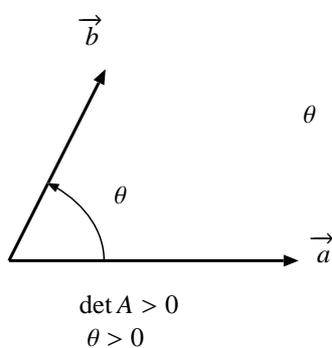
\vec{a} から \vec{b} に正の向きに計った角を θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とし, \vec{a} と \vec{b} を並べてできる行列を $A = (\vec{a}, \vec{b})$ と表わす。このとき, 次が成り立つ。

(det の符号)

$$\det A > 0 \implies 0 < \theta < \pi$$

$$\det A < 0 \implies \pi < \theta < 2\pi$$

$$\det A = 0 \implies \theta = 0, \pi$$



[証明] \vec{a} を角 θ 回転して $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ 倍したものが \vec{b} である。よって $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ とおくと
き注1,

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \begin{pmatrix} a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta \\ a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

注1 角 θ の回転行列は $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ である。

となる。従って $A = \begin{pmatrix} a_1 & \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}(a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta) \\ a_2 & \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}(a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta) \end{pmatrix}$ である注²。

そうすると注³

$$\begin{aligned} \det A &= a_1 \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}(a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta) - \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}(a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta)a_2 \\ &= \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}(a_1^2 + a_2^2) \sin \theta \\ &= \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} |\vec{a}|^2 (\sin \theta) \\ &= |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \end{aligned}$$

となる。よって

$$\det A > 0 \implies \sin \theta > 0$$

$$\det A < 0 \implies \sin \theta < 0$$

$$\det A = 0 \implies \sin \theta = 0$$

となるが、いま $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから

$$\sin \theta > 0 \implies 0 < \theta < \pi, \quad \sin \theta < 0 \implies \pi < \theta < 2\pi, \quad \sin \theta = 0 \implies \theta = 0, \pi$$

である。以上で示された。■

[注] 動点 $P(x, y)$ の座標が時刻 t を用いて $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ で表されているとする。

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

とおく。 $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$ はそれぞれ P の速度ベクトル, 加速度ベクトルである。

注²行列 A は \vec{a} と \vec{b} を並べたもの。

注³ $\det A = ad - bc$ をまじめに計算する。

従って $\det \begin{pmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{pmatrix}$ の符号を見ると P の動く方向が分かる。

$\det \begin{pmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{pmatrix} > 0$ なら P は進行方向左向きに

$\det \begin{pmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{pmatrix} < 0$ なら P は進行方向右向きに

進む。

