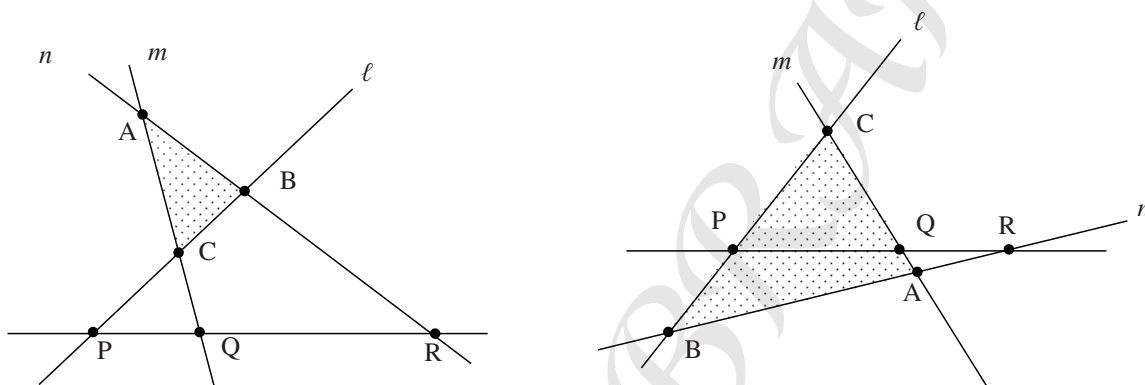


(Menelaos の定理)

一直線上に異なる3点 P, Q, R があるとする。3直線 ℓ, m, n はそれぞれ P, Q, R を通り、どの2つも平行でないとする。 ℓ と m の交点を C 、 m と n の交点を A 、 n と ℓ の交点を B とする。このとき、次が成り立つ。

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$



R は AB 上に、 P は BC 上に、 Q は CA 上にそれぞれあるので

$$\overrightarrow{BR} = y\overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{BC} + z\overrightarrow{CA} \dots \textcircled{1}$$

と書ける。一方、 P, Q, R は一直線上にあるので

$$\overrightarrow{RQ} = k\overrightarrow{RP} \dots \textcircled{2}$$

と書ける。② を B を始点とする位置ベクトルで書き直すと

$$\overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BR} = k(\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BR})$$

ここへ ① を代入すると

$$\overrightarrow{BC} + z\overrightarrow{CA} - y\overrightarrow{BA} = k(x\overrightarrow{BC} - y\overrightarrow{BA})$$

ここへ $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$ を代入すると

$$\overrightarrow{BC} + z(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) - y\overrightarrow{BA} = k(x\overrightarrow{BC} - y\overrightarrow{BA})$$

つまり

$$(1-z)\vec{BC} + (z-y)\vec{BA} = kx\vec{BC} - ky\vec{BA}$$

となる。ここで \vec{BC} と \vec{BA} は 1 次独立であるから

$$1-z = kx, \quad z-y = -ky$$

である。よって k を消去すると

$$(1-z)y = -x(z-y) \quad \text{つまり} \quad y - yz - xy = -zx$$

この両辺に xyz を加えると

$$xyz - yz - y(x-1) = xyz - zx$$

となるので、この辺々を因数分解すると

$$y(x-1)(z-1) = zx(y-1)$$

となり、 $|y||x-1||z-1| = |z||x||y-1| \cdots \textcircled{3}$

ところで

$$\vec{BR} = y\vec{BA}, \quad \vec{BP} = x\vec{BC}, \quad \vec{CQ} = z\vec{CA}$$

であるから

$$\vec{CP} = \vec{BP} - \vec{BC} = x\vec{BC} - \vec{BC} = (x-1)\vec{BC}$$

$$\vec{AR} = \vec{BR} - \vec{BA} = y\vec{BA} - \vec{BA} = (y-1)\vec{BA}$$

$$\vec{AQ} = \vec{CQ} - \vec{CA} = z\vec{CA} - \vec{CA} = (z-1)\vec{CA}$$

である。そうすると

$$BR \cdot CP \cdot AQ = |y|BA \cdot |x-1|BC \cdot |z-1|CA$$

$$CQ \cdot BP \cdot AR = |z|CA \cdot |x|BC \cdot |y-1|BA$$

ここで $\textcircled{3}$ より、この両者の右辺は一致するので

$$BR \cdot CP \cdot AQ = CQ \cdot BP \cdot AR$$

となり、従って $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$ であるから示された。■