

## 極と極線

楕円  $Ax^2 + By^2 = 1 \cdots (1)$  上の点  $P_0(x_0, y_0)$  における接線の方程式は

$$Ax_0x + By_0y = 1 \cdots (*)$$

であった。P が (1) 上にないときに、(\*) が表す直線の図形的意味を考える。

直線  $Ax_0x + By_0y = 1$  を点  $P_0(x_0, y_0)$  の (1) に関する極線、  
 $P_0(x_0, y_0)$  を直線  $Ax_0x + By_0y = 1$  の (1) に関する極という。

(  $Ax_0x + By_0y = 1$  の図形的意味 )

楕円 (円)  $Ax^2 + By^2 = 1 \cdots (1)$  と点  $P(x_0, y_0)$  , 直線  $Ax_0x + By_0y = 1 \cdots (*)$  を考える。

- (1) P が (1) 上にあるときは、(\*) は P における (1) の接線である。
- (2) P が (1) の外部にあるときは、(\*) は P から (1) へ引いた 2 接線の接点を結ぶ直線である。
- (3) P が (1) の内部にあるときは、(\*) は P を通る弦と (1) の 2 交点における接線の交点の軌跡である。

(1) 略。

(2) 2 接線の接点をそれぞれ

$$Q(x_1, y_1), R(x_2, y_2)$$

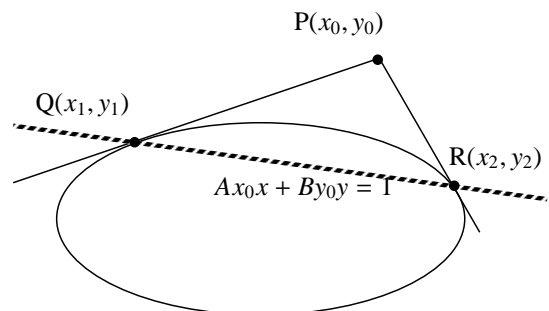
とする。Q, R における接線はそれぞれ

$$Ax_1x + By_1y = 1 \cdots 1 \quad Ax_2x + By_2y = 1 \cdots 2$$

となる。1 も 2 もともに  $P(x_0, y_0)$  を通るので

$$Ax_1x_0 + By_1y_0 = 1 \quad Ax_2x_0 + By_2y_0 = 1$$

である。これは、直線  $Ax_0x + By_0y = 1 \cdots 3$  が 2 点  $Q(x_1, y_1), R(x_2, y_2)$  を通ることを意味している。従って、3 は直線 QR の方程式である。



(3) 弦と ( ) の交点を  $Q(x_1, y_1)$ ,  $R(x_2, y_2)$  とし,  $Q$ ,  $R$  における接線の交点を  $R(s, t)$  とする。直線  $QR$  の方程式は

$$Asx + Bty = 1 \cdots 1$$

である。1 は  $P_0(x_0, y_0)$  を通るので

$$Asx_0 + Bty_0 = 1 \cdots 2$$

が成り立つ。これは  $Ax_0x + By_0y = 1$  上に  $(s, t)$  があることを意味している。

逆に,  $(s, t)$  が  $Ax_0x + By_0y = 1$  上にあれば, 2 が成り立つ。これは,  $(s, t)$  から ( ) に引いた 2 接線の接点を結ぶ直線上に  $P(x_0, y_0)$  が存在することを意味している。■

