

## 根軸

2つの円の方程式を引いて得られる直線の図形的意味を考える。但し、一方の円が他方の円に含まれることはないとする。

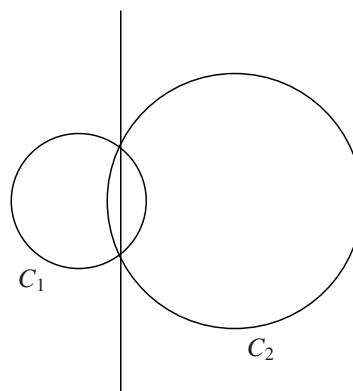
### (根軸)

2円  $\begin{cases} C_1 : (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - r_1^2 = 0 \cdots \textcircled{1} \\ C_2 : (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - r_2^2 = 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$  があるとき、 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ によって得られる

直線  $l$  を2円  $C_1, C_2$  の根軸と言う。  $l$  は

- (1)  $C_1, C_2$  が異なる2点で交わる時  
 $C_1, C_2$  の共通弦である。
- (2)  $C_1, C_2$  が接する時  
 $C_1, C_2$  の接点における、共通接線である。
- (3)  $C_1, C_2$  が共有点をもたない時  
 $C_1, C_2$  へ引いた接線の長さが等しい点の軌跡である。

(1)  $(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - r_1^2 - \{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - r_2^2\} = 0$   
なる直線は  $\textcircled{1}$  と  $\textcircled{2}$  の交点をすべて通るので確かに共通弦である。



(3) ① - ② より

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2 = (x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2^2 \cdots \textcircled{3}$$

となる。P(x, y), A<sub>1</sub>(a<sub>1</sub>, b<sub>1</sub>), A<sub>2</sub>(a<sub>2</sub>, b<sub>2</sub>) とおき、2円の外部の点PからC<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>へ引いた接線の接点をそれぞれQ<sub>1</sub>, Q<sub>2</sub>とする。

③より  $PA_1^2 - r_1^2 = PA_2^2 - r_2^2$  となるが、

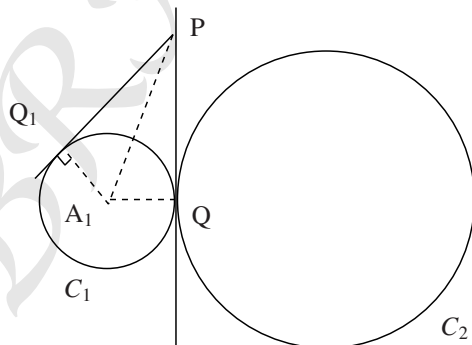
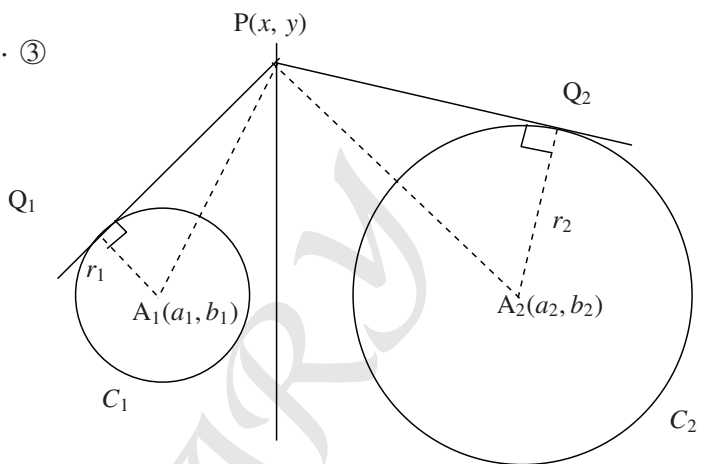
$$PA_1^2 - r_1^2 = PQ_1^2$$

$$PA_2^2 - r_2^2 = PQ_2^2$$

であるから、 $PQ_1 = PQ_2$  となり、示された。

(2) ① と ② の接点をQとする。

(1)より、 $l$ はQを通る。また、(3)より  $PQ = PQ_1$  である。そうすると  $\triangle PQ_1A_1 \equiv \triangle PQA_1$  (3辺合同) であるから  $A_1Q \perp PQ$  となる。よって  $l$ はC<sub>1</sub>の接線である。同様に  $l$ はC<sub>2</sub>の接線でもある。以上で示された。■



### (3円の根軸)

3つの円C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>の2円ずつの3つの根軸は、1点で交わるか、または、すべて平行である。

3つの円を

$$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$x^2 + y^2 + a_3x + b_3y + c_3 = 0 \cdots \textcircled{3}$$

とする。① と ② の根軸の方程式は ① - ② より

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0 \cdots \textcircled{4}$$

である。また、② と ③ の根軸の方程式は ② - ③ より

$$(a_2 - a_3)x + (b_2 - b_3)y + (c_2 - c_3) = 0 \cdots \textcircled{5}$$

である。更に、①と③の根軸の方程式は③-①より

$$(a_3 - a_1)x + (b_3 - b_1)y + (c_3 - c_1) = 0 \cdots \textcircled{6}$$

である。

### Case 1. ④と⑤が平行のとき

④と⑤の平行条件より

$$\begin{aligned} (a_1 - a_2)(b_2 - b_3) - (b_1 - b_2)(a_2 - a_3) &= 0 \\ a_1b_2 - a_2b_1 - a_1b_3 + b_1a_3 + a_2b_3 - a_3b_2 &= 0 \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

となる。一方

$$(a_1 - a_2)(b_3 - b_1) - (a_3 - a_1)(b_1 - b_2) = -(a_1b_2 - a_2b_1 - a_1b_3 + b_1a_3 + a_2b_3 - a_3b_2)$$

であるから⑦より

$$(a_1 - a_2)(b_3 - b_1) - (a_3 - a_1)(b_1 - b_2) = 0$$

と分かる。よって④と⑥は平行である。従って3直線④, ⑤, ⑥はすべて平行となる。

### Case 2. ④と⑤が1点で交わる時

④+⑤から作った直線

$$\begin{aligned} \{(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)\} + \{(a_2 - a_3)x + (b_2 - b_3)y + (c_2 - c_3)\} &= 0 \\ (a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3) &= 0 \cdots \textcircled{8} \end{aligned}$$

は④と⑤の交点を通る。しかし⑧と⑥は同じ直線であるから、⑥は④と⑤の交点を通ることが分かった。従って④, ⑤, ⑥は1点で交わる。■

3円 $C_1, C_2, C_3$ の2つずつが、異なる2点で交わる時に、上の定理を使うと次を得る。

#### (Mongeの定理)

3つの円の2つずつが異なる2点で交わる時、2円ずつの3つの共通弦は1点で交わるか、または、すべて平行である。