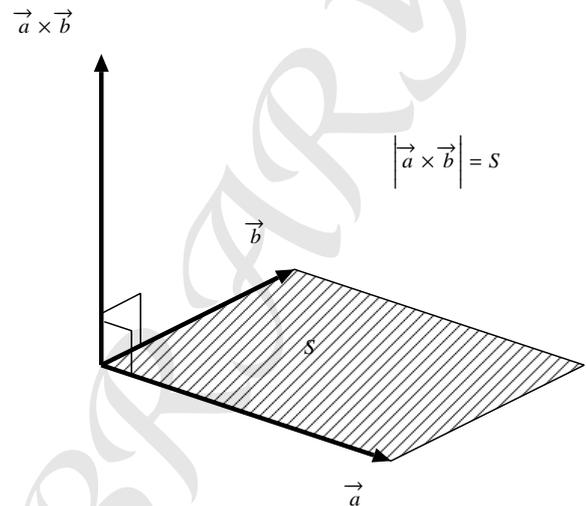


外積ベクトル

(外積ベクトルの定義)

\vec{a}, \vec{b} が与えられたとき, 次の3条件を満たすベクトル \vec{c} を \vec{a} と \vec{b} の外積といい,
 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ と書く。

- (i) $\vec{a} \perp \vec{c}$ かつ $\vec{b} \perp \vec{c}$
- (ii) $|\vec{c}|$ は \vec{a}, \vec{b} の張る平行四辺形の面積 S に等しい。
- (iii) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は右手系をなす。つまり \vec{a} から \vec{b} に向かって右ネジを回すとき進む方向が \vec{c} の向きと一致する。



$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき, $\vec{a} \times \vec{b}$ の成分表示を求める。そのために, 次が成り立つことを利用する。

- (1) $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$
- (2) $\vec{y} \times \vec{x} = -\vec{x} \times \vec{y}$
- (3) $(k\vec{x}) \times \vec{y} = k(\vec{x} \times \vec{y})$
- (3') $\vec{x} \times (k\vec{y}) = k(\vec{x} \times \vec{y})$
- (4) $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$
- (4') $(\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z}$

ひとまず, これらを認めて成分表示を求めることにする。

$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと, 直接図形的に考えて

$$(5) \vec{e} \times \vec{f} = \vec{g}, \vec{f} \times \vec{g} = \vec{e}, \vec{g} \times \vec{e} = \vec{f}$$

がわかる。さて、

$$\vec{a} = a_1 \vec{e} + a_2 \vec{f} + a_3 \vec{g}, \quad \vec{b} = b_1 \vec{e} + b_2 \vec{f} + b_3 \vec{g}$$

であるから (3), (3'), (4), (4') を用いると

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1 \vec{e} + a_2 \vec{f} + a_3 \vec{g}) \times (b_1 \vec{e} + b_2 \vec{f} + b_3 \vec{g}) \\ &= a_1 b_1 \vec{e} \times \vec{e} + a_1 b_2 \vec{e} \times \vec{f} + a_1 b_3 \vec{e} \times \vec{g} \\ &\quad + a_2 b_1 \vec{f} \times \vec{e} + a_2 b_2 \vec{f} \times \vec{f} + a_2 b_3 \vec{f} \times \vec{g} \\ &\quad + a_3 b_1 \vec{g} \times \vec{e} + a_3 b_2 \vec{g} \times \vec{f} + a_3 b_3 \vec{g} \times \vec{g} \end{aligned}$$

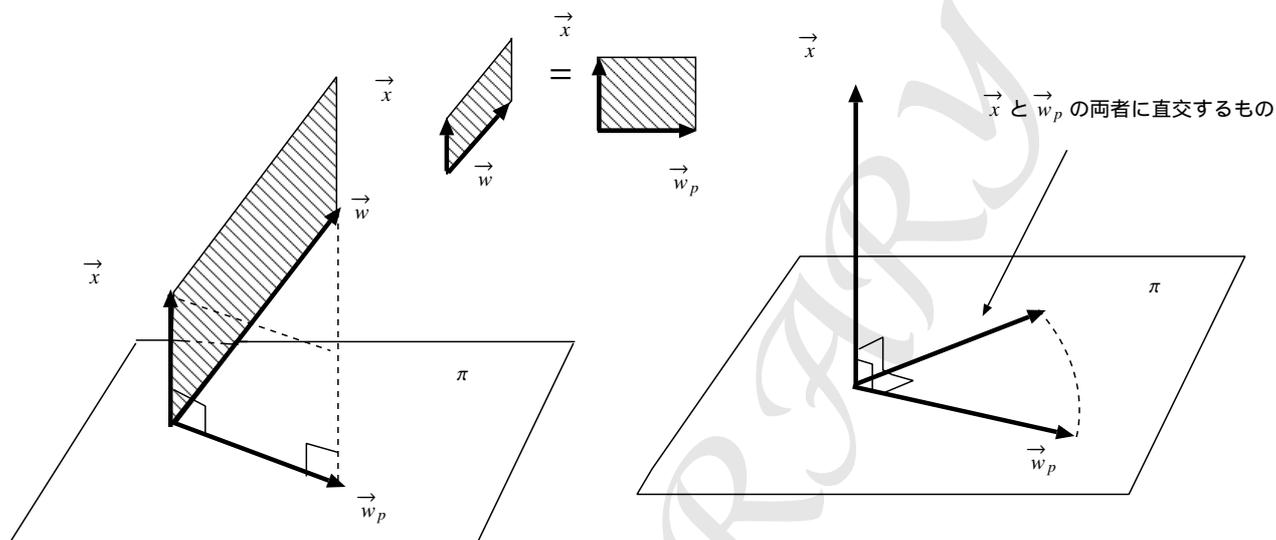
となるが、ここで (1)(2)(5) を用いると

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= a_1 b_2 \vec{g} - a_1 b_3 \vec{f} - a_2 b_1 \vec{g} + a_2 b_3 \vec{e} + a_3 b_1 \vec{f} - a_3 b_2 \vec{e} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{f} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{g} \\ &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right| \end{pmatrix} \quad \left(\text{但し } \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \right) \end{aligned}$$

となる。これが外積ベクトルの成分表示である。我々の公式をきちんと証明するには、あと (1)(2)(3)(3')(4')(4)(5) を示せばよい。

しかし、(1)(2)(3)(5) は直接、図形的に考えれば容易に示される。また (3') は (3) と (2) から直ちに示され、(4') も (4) と (2) から直ちに示される。そこで、以下では (4) のみ示すことにする。

(4) の証明



\vec{x} に垂直な平面を π , \vec{w} を任意のベクトルとする。また, \vec{w} の π への正射影を \vec{w}_p とする。まず, \vec{x} と \vec{w} の張る平行四辺形の面積は \vec{x} と \vec{w}_p の張る長方形の面積 $|\vec{x}||\vec{w}_p|$ に等しい。また, \vec{x} と \vec{w} の両方に直交するベクトルは \vec{x} と \vec{w}_p の両者にも直交する。よって,

$$(6) \quad \vec{x} \times \vec{w} = \vec{x} \times \vec{w}_p$$

である。

一方, $\vec{x} \perp \vec{w}_p$, $\vec{x} \perp \pi$ であるから \vec{x} と \vec{w}_p の両者に直交するベクトルは平面 π 上で \vec{w}_p を 90° 回転することで得られる。よって, $\vec{x} \times \vec{w}_p$ は平面 π 上で \vec{w}_p を 90° 回転し, 長さを $|\vec{x}||\vec{w}_p|$ にしたベクトルである。そこで, 平面 π 上の 90° 回転の線形変換を f とすると

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{w} &= \vec{x} \times \vec{w}_p \\ &= |\vec{x}||\vec{w}_p| \left\{ \frac{1}{|\vec{w}_p|} f(\vec{w}_p) \right\} \\ &= |\vec{x}| f(\vec{w}_p) \end{aligned}$$

となる^{注1}。つまり

$$(7) \quad \vec{x} \times \vec{w} = |\vec{x}| f(\vec{w}_p)$$

注1 $\frac{1}{|\vec{w}_p|} f(\vec{w}_p)$ は $f(\vec{w}_p)$ と同じ向きで長さ1のベクトル。

である。よって(7)において $\vec{w} = \vec{y}$, \vec{z} とすると,

$$\vec{x} \times \vec{y} = |\vec{x}|f(\vec{y}_p), \quad \vec{x} \times \vec{z} = |\vec{x}|f(\vec{z}_p)$$

となるので, 辺々加えると

$$\vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z} = |\vec{x}| \{f(\vec{y}_p) + f(\vec{z}_p)\}$$

となる。従って,

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z} &= |\vec{x}| \{f(\vec{y}_p) + f(\vec{z}_p)\} \\ &= |\vec{x}|f(\vec{y}_p + \vec{z}_p) \text{注}^2 \end{aligned}$$

となる。ここで, $\vec{y}_p + \vec{z}_p = \left(\vec{y} + \vec{z}\right)_p$ 注³であるから,

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z} &= |\vec{x}|f\left(\left(\vec{y} + \vec{z}\right)_p\right) \\ &= \vec{x} \times \left(\vec{y} + \vec{z}\right) \text{注}^4 \end{aligned}$$

となり示された。■

(公式)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{のとき,}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \quad \left(\text{但し } \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \right)$$

注² f の線形性より, $f(\vec{y}_p) + f(\vec{z}_p) = f(\vec{y}_p + \vec{z}_p)$ である。

注³ 正射影したベクトルの和は, ベクトルの和の正射影に等しい。

注⁴ (6) において $\vec{w} = \vec{y} + \vec{z}$ とおくと, $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = |\vec{x}|f\left(\left(\vec{y} + \vec{z}\right)_p\right)$ となる。