

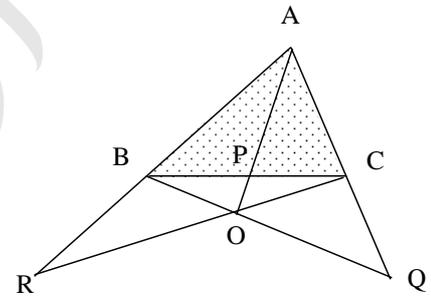
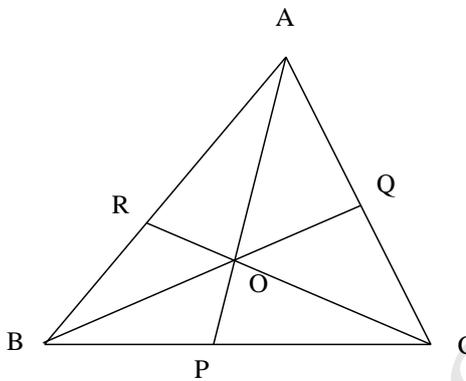
(Ceva の定理)

平面上に相異なる 4 点 O, A, B, C があり

- (1) OA, OB, OC のどの 2 つも平行でない
- (2) OA と BC は平行でない
- (3) OB と CA は平行でない
- (4) OC と AB は平行でない

とする。また、直線 OA と直線 BC 、直線 OB と直線 CA 、直線 OC と直線 AB の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき、次が成り立つ。

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$



$\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$, とおく。

3 点 O, A, P , 3 点 O, B, Q , 3 点 O, C, R はそれぞれ一直線上にあるので

$$\vec{a} = k\vec{OP}, \quad \vec{b} = \ell\vec{OQ}, \quad \vec{c} = m\vec{OR}$$

と書ける。一方、 P は直線 BC 上、 Q は直線 CA 上、 R は直線 AB 上にあるので

$$\vec{OP} = \vec{b} + x(\vec{c} - \vec{b}) = (1-x)\vec{b} + x\vec{c}$$

$$\vec{OQ} = \vec{c} + y(\vec{a} - \vec{c}) = (1-y)\vec{c} + y\vec{a}$$

$$\vec{OR} = \vec{a} + z(\vec{b} - \vec{a}) = (1-z)\vec{a} + z\vec{b}$$

と書ける。従って

$$\vec{a} = k\{(1-x)\vec{b} + x\vec{c}\} \cdots 1$$

$$\vec{b} = \ell \left\{ (1-y)\vec{c} + y\vec{a} \right\} \cdots 2$$

$$\vec{c} = m \left\{ (1-z)\vec{a} + z\vec{b} \right\} \cdots 3$$

である。3 を 1 に代入すると

$$\vec{a} = k \left\{ (1-x)\vec{b} + x \left\{ m \left\{ (1-z)\vec{a} + z\vec{b} \right\} \right\} \right\}$$

$$\vec{a} = kxm(1-z)\vec{a} + k(1-x+xmz)\vec{b}$$

となるが、仮定から \vec{a}, \vec{b} は 1 次独立であるから

$$kxm = 1, \quad k(1-x+xmz) = 0$$

となる。そうすると、第 1 式より $k \neq 0$ であるから、第 2 式より

$$1-x+xmz = 0 \cdots 4$$

となる。一方、3 を 2 に代入すると

$$\vec{b} = \ell \left\{ (1-y) \left\{ m \left\{ (1-z)\vec{a} + z\vec{b} \right\} \right\} + y\vec{a} \right\}$$

$$\vec{b} = \ell \left\{ (1-y)m(1-z) + y \right\} \vec{a} + \ell(1-y)mz\vec{b}$$

よって

$$\ell \left\{ (1-y)m(1-z) + y \right\} = 0, \quad \ell(1-y)mz = 1$$

となる。第 2 式より $\ell \neq 0$ であるから、第 1 式より

$$(1-y)m(1-z) + y = 0 \cdots 5$$

を得る。

$$4 \text{ より } (1-y)(1-z)xzm = (1-y)(1-z)(x-1)$$

$$5 \text{ より } xz(1-y)m(1-z) = -xyz$$

であるから

$$(1-y)(1-z)(x-1) = -xyz$$

$$\therefore (1-x)(1-y)(1-z) = xyz$$

$$\text{従って } |1-x||1-y||1-z| = |x||y||z| \cdots 6$$

となる。ここで

$$\overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CQ} = y\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{AR} = z\overrightarrow{AB}$$

であるから

$$(1-x)\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} - x\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PC}$$

$$(1-y)\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} - y\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{QA}$$

$$(1-z)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - z\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{RB}$$

これと 6 より

$$|1-x||1-y||1-z| = |x||y||z|$$

$$|1-x|BC \cdot |1-y|CA \cdot |1-z|AB = |x|BC \cdot |y|CA \cdot |z|AB$$

$$PC \cdot QA \cdot RB = BP \cdot CQ \cdot AR$$

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

となり示された。■