

(Apollonius の円)

定点 A, B からの距離の比が $m:n$ ($m > 0, n > 0, m \neq n$) であるような点 P , つまり

$$AP : BP = m : n \quad (m > 0, n > 0, m \neq n)$$

を満たす点 P の軌跡は, AB を $m:n$ に内分する点 Q と, AB を $m:n$ に外分する点 R を直径の両端とする円である。

[注] $m = n$ のときは, P は A, B から等距離にあるので, 軌跡は, 線分 AB の垂直二等分線である。

A, B, P, Q, R の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ とする。

$$\frac{AP}{BP} = \frac{m}{n} \text{ であるから } n^2 AP^2 = m^2 BP^2$$

$$n^2 |\vec{p} - \vec{a}|^2 = m^2 |\vec{p} - \vec{b}|^2$$

$$n^2 |\vec{p} - \vec{a}|^2 - m^2 |\vec{p} - \vec{b}|^2 = 0$$

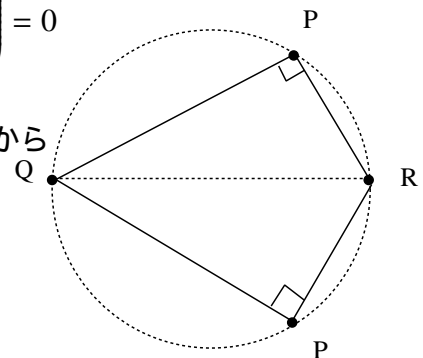
$$\{n(\vec{p} - \vec{a}) - m(\vec{p} - \vec{b})\} \cdot \{n(\vec{p} - \vec{a}) + m(\vec{p} - \vec{b})\} = 0$$

$$(n-m) \left(\vec{p} - \frac{n\vec{a} - m\vec{b}}{n-m} \right) \cdot (n+m) \left(\vec{p} - \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{n+m} \right) = 0$$

$$\text{ここで, } \vec{r} = \frac{n\vec{a} - m\vec{b}}{n-m}, \vec{q} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{n+m} \text{ であるから}$$

$$(\vec{p} - \vec{r}) \cdot (\vec{p} - \vec{q}) = 0$$

$$\vec{RP} \cdot \vec{QP} = 0$$



従って $P = R$ または $P = Q$ または $RP \perp QP = 0$

となるので, P の軌跡は Q, R を直径の両端とする円である。■