

# 対称式と基本対称式

対称式は，基本対称式で表されることを示す。

## 1 $n$ 変数多項式

$n$  個の文字  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を考える。 $l_1, l_2, \dots, l_n$  を 0 以上の整数とすると  $X_1^{l_1} X_2^{l_2} \dots X_n^{l_n}$  の形の式を  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の単項式と言い， $l_1 + l_2 + \dots + l_n$  をその次数と言う。

$m_1, m_2, \dots, m_t$  を  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の単項式とし， $a_1, a_2, \dots, a_t$  を実数とすると  $\sum_{k=1}^t a_k m_k$

を  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の実数係数  $n$  変数多項式と言い  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  などと表す。 $n$  変数多項式  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  に現れる，係数が 0 でない単項式の次数の最大値を，この多項式の次数と言って  $\deg f$  と書く。

## 2 置換

$n$  個の文字  $1, 2, \dots, n$  の並べ換えを置換と言うことにする。例えば  $1, 2, 3, \dots, n$  を  $2, 3, \dots, n, 1$  と並べ換える置換を  $\sigma$  とするとき

$$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \dots, \sigma(n-1) = n, \sigma(n) = 1$$

と書いたり

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

と表したりする。

$\sigma$  を  $1, 2, \dots, n$  の置換とするとき，多項式  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  に対して

$$f^\sigma(X_1, X_2, \dots, X_n) = f(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)})$$

と定義する。

## 3 対称式と基本対称式

$n$  個の文字  $1, 2, \dots, n$  の任意の置換  $\sigma$  に対して，つねに

$$f^\sigma(X_1, X_2, \dots, X_n) = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

となるとき,  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  は  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の対称式であると言う。つまり, 変数をどのように入れ換えても, 式としては変わらないものを対称式と呼ぶ。

対称式のなかでも最も基本的なものが, 次に述べる基本対称式と呼ばれるものである。  
 $t$  についての  $n$  次式

$$F(t) = (t - X_1)(t - X_2) \cdots (t - X_n)$$

を考える。  $F(t)$  の右辺を展開して  $t$  についてまとめると

$$(t - X_1)(t - X_2) \cdots (t - X_n) = t^n - s_1 t^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} s_{n-1} t + (-1)^n s_n \cdots 1$$

のように書ける。1 の左辺において  $X_1, X_2, \dots, X_n$  をどのように入れ換えても  $F(t)$  は  $t$  の式としては同じであるから, 右辺の  $t^{n-1}, t^{n-2}, \dots, t$  の係数ならびに定数項も変わらない。よって  $s_1, s_2, \dots, s_n$  は  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の対称式であるが, これら  $n$  個の対称式を  $X_1, X_2, \dots, X_n$  に関する基本対称式と呼ぶ。  $s_1, s_2, \dots, s_n$  の  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の多項式としての次数はそれぞれ  $1, 2, \dots, n$  となっている。

## 4 辞書式順序

$X_1, X_2, \dots, X_n$  に関する単項式の間には大小関係を定義して順序を入れる。この順序の入れ方は, 辞書における単語の並べ方と同様なので辞書式順序と呼ばれる。

$X_1, X_2, \dots, X_n$  の異なる 2 つの単項式

$$M_1 = X_1^{p_1} X_2^{p_2} \cdots X_n^{p_n}, \quad M_2 = X_1^{q_1} X_2^{q_2} \cdots X_n^{q_n}$$

の間に次のようにして大小関係を定義する。

まず次数を見て

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n > q_1 + q_2 + \cdots + q_n \text{ ならば } M_1 > M_2$$

とする。次に,  $M_1$  と  $M_2$  の次数が同じときは

$$p_1 > q_1 \text{ ならば } M_1 > M_2$$

とする。また  $M_1$  と  $M_2$  の次数が等しく, 更に  $p_1 = q_1$  のときは

$$p_2 > q_2 \text{ ならば } M_1 > M_2$$

とする。以下, この操作を繰り返して,  $M_1$  と  $M_2$  の次数が等しく, しかも  $p_1 = q_1, p_2 = q_2, \dots, p_k = q_k$  のときは

$$p_{k+1} > q_{k+1} \text{ ならば } M_1 > M_2$$

とする。

$M_1$  と  $M_2$  は異なるので、この操作によって大小関係が決まる。

この大小関係によって、単項式を大きさの順番に並べることができる。

例えば、最小の単項式は次数が 0 の  $X_1^0 X_2^0 \cdots X_n^0 = 1$  である。次に小さい単項式は  $X_1^0 X_2^0 \cdots X_n^1 = X_n$  である。

## 5 定理の証明

次の定理を証明する。

定理

対称式は、基本対称式の多項式で表すことができる。

つまり、 $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  が対称式ならば

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = g(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

となる多項式  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  が存在する。但し  $s_1, s_2, \dots, s_n$  は基本対称式である。

対称式を単項式の和で表し

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{k=1}^t a_k M_k \cdots 1 \quad (a_k \text{ は } 0 \text{ でない実数, } M_k \text{ は単項式})$$

とする。1 の右辺に現れる単項式の大きさについて考える。

もし、1 の右辺に最小の単項式 1 しか現れないなら  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  は定数であるから  $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = A$  とおく。そうすると  $g(X_1, X_2, \dots, X_n) = A$  とおけば  $g(s_1, s_2, \dots, s_n) = A$  であるから

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = g(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

となり、確かに定理は成り立つ。

そこで、1 の右辺に現れる単項式のうち最大のものを  $M$  とする。そして次の仮定をおく。

(仮定)  $M$  より小さい単項式しか現れないような対称式については定理が成り立つとする。

まず、この仮定のもとで

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = g(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

となる  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  の存在を示そう。

$M = X_1^{p_1} X_2^{p_2} \dots X_n^{p_n}$  とする。 $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  は対称式であるから  $X_1, X_2, \dots, X_n$  をどのように置換しても式は変わらない。従って  $M = X_1^{p_1} X_2^{p_2} \dots X_n^{p_n}$  において  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を任意に置換して得られる単項式はすべて 1 の右辺に現れている。よって、とくに

$$X_2^{p_1} X_1^{p_2} X_3^{p_3} \dots X_n^{p_n} = X_1^{p_2} X_2^{p_1} X_3^{p_3} \dots X_n^{p_n} \quad (X_1 \text{ と } X_2 \text{ を入れ換えたもの})$$

$$X_1^{p_1} X_3^{p_2} X_2^{p_3} \dots X_n^{p_n} = X_1^{p_1} X_2^{p_3} X_3^{p_2} \dots X_n^{p_n} \quad (X_2 \text{ と } X_3 \text{ を入れ換えたもの})$$

.....

$$X_1^{p_1} X_1^{p_2} \dots X_n^{p_{n-1}} X_{n-1}^{p_n} = X_1^{p_1} X_2^{p_2} \dots X_{n-1}^{p_n} X_n^{p_{n-1}} \quad (X_{n-1} \text{ と } X_n \text{ を入れ換えたもの})$$

がすべて現れる。

ところが  $M = X_1^{p_1} X_2^{p_2} \dots X_n^{p_n}$  は 1 に現れるもののうち最大のものであるから、上どの単項式より  $M$  の方が大きい。

$X_1^{p_2} X_2^{p_1} X_3^{p_3} \dots X_n^{p_n}$  と  $M = X_1^{p_1} X_2^{p_2} \dots X_n^{p_n}$  において、もし  $p_2 > p_1$  とすると

$$X_1^{p_2} X_2^{p_1} X_3^{p_3} \dots X_n^{p_n} > M$$

となり  $M$  の最大性に反するから  $p_2 \leq p_1$  である。

また、 $X_1^{p_1} X_2^{p_3} X_3^{p_2} \dots X_n^{p_n}$  と  $M = X_1^{p_1} X_2^{p_2} \dots X_n^{p_n}$  において、もし  $p_3 > p_2$  とすると

$$X_1^{p_1} X_2^{p_3} X_3^{p_2} \dots X_n^{p_n} > M$$

となり、やはり  $M$  の最大性に反するから  $p_3 \leq p_2$  である。

このように、順々に  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の冪を見ながら大小を比較していくと

$$p_n \leq p_{n-1} \leq \dots \leq p_2 \leq p_1$$

と分かる。そうすると

$$p_{n-1} - p_n \geq 0, \dots, p_2 - p_3 \geq 0, p_1 - p_2 \geq 0$$

であるから、基本対称式  $s_1, s_2, \dots, s_n$  を用いて、多項式  $h(X_1, X_2, \dots, X_n)$  を

$$h(X_1, X_2, \dots, X_n) = s_n^{p_n} s_{n-1}^{p_{n-1}-p_n} \dots s_2^{p_2-p_3} s_1^{p_1-p_2}$$

とおくことができる。

$s_1, s_2, \dots, s_n$  は対称式であるから  $h(X_1, X_2, \dots, X_n)$  も対称式である。 $h(X_1, X_2, \dots, X_n)$  に現れる単項式のうち最大のを求めよう。

$$s_1 = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$s_2 = X_1 X_2 + X_1 X_3 + \dots + X_1 X_n + \dots + X_{n-1} X_n + X_n X_1$$

...

$$s_n = X_1 X_2 \dots X_n$$

という基本対称式の具体的な形と、番号の若い変数の冪が大きいほど単項式は大きくなることをあわせて考えると、 $h(X_1, X_2, \dots, X_n)$  に現れる単項式のうち最大のものは、

$$\begin{aligned} & (X_1 X_2 \cdots X_n)^{p_n} (X_1 X_2 \cdots X_{n-1})^{p_{n-1}-p_n} \cdots (X_1 X_2)^{p_2-p_3} X_1^{p_1-p_2} \\ &= X_1^{p_n+(p_{n-1}-p_n)+\cdots+(p_1-p_2)} X_2^{p_n+(p_{n-1}-p_n)+\cdots+(p_2-p_3)} \cdots X_{n-1}^{p_n+(p_{n-1}-p_n)} X_n^{p_n} \\ &= X_1^{p_1} X_2^{p_2} \cdots X_{n-1}^{p_{n-1}} X_n^{p_n} \end{aligned}$$

となる。つまり  $h(X_1, X_2, \dots, X_n)$  に現れる単項式のうち最大のものは、 $M$  に他ならない。しかも  $h(X_1, X_2, \dots, X_n)$  において  $M$  の係数は 1 である。そこで  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  における  $M$  の係数を  $c$  とするとき

$$k(X_1, X_2, \dots, X_n) = f(X_1, X_2, \dots, X_n) - ch(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

とおけば  $k(X_1, X_2, \dots, X_n)$  も対称式であり、しかも  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $h(X_1, X_2, \dots, X_n)$  における最大の単項式  $M$  は互いに打ち消しあうので消えて、 $k(X_1, X_2, \dots, X_n)$  における最大の単項式は  $M$  よりも小さくなっている。

ここで (仮定) を使うと

$$k(X_1, X_2, \dots, X_n) = g_1(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

となる多項式  $g_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$  が存在する。一方

$$h_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_n^{p_n} X_{n-1}^{p_{n-1}-p_n} \cdots X_2^{p_2-p_3} X_1^{p_1-p_2}$$

とおくと

$$h_1(s_1, s_2, \dots, s_n) = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

である。よって

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = g_1(X_1, X_2, \dots, X_n) + ch_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

とおけば

$$\begin{aligned} & g(s_1, s_2, \dots, s_n) \\ &= g_1(s_1, s_2, \dots, s_n) + ch_1(s_1, s_2, \dots, s_n) \\ &= k(X_1, X_2, \dots, X_n) + ch(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &= f(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned}$$

となる。

以上で (仮定) のもとで

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = g(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

となる多項式  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  の存在が示された。

さて、最終的には次のようにして定理が示される。

単項式は、その大きさによって順番に並べることができるから、小さい方から順に番号をつけることにする。例えば 1 番目は 1, 2 番目は  $X_n$  である。

そして、対称式  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  に現れる最大の単項式の番号を  $N(f)$  と書くことにする。

$N(f) = 1$  のときつねに定理が成り立つことは、初めに示した。

次に  $N(f) = 2$  となる対称式  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  について考える。

すでに  $N(f_1) < 2$  となる対称式  $f_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$  に対してはつねに定理が成り立っているから（仮定）において  $M$  の番号を 2 として上の議論をすれば、 $N(f) = 2$  となる任意の対称式  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  について定理が成り立つことが分かる。

今度は、 $N(f) = 3$  となる対称式  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  について考える。

すでに  $N(f_2) < 3$  となる対称式  $f_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$  に対してはつねに定理が成り立っているから（仮定）において  $M$  の番号を 3 として上の議論をすれば、 $N(f) = 3$  となる任意の対称式  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  について定理が成り立つことが分かる。

以下、順々に同様の議論を繰り返せば、 $N(f) = 1, 2, 3, 4, \dots$  のときいつでも定理が成り立つことになる。従って、どんな対称式に対しても定理が示された。■