

多項式の一一致の定理

1 拡張された因数定理

$f(x)$ を $x-a$ で割った余りは定数であるから $f(x) = (x-a)h(x) + r$ と書ける。ここへ $x = a$ を代入すると $f(a) = r$ となり $f(x)$ を $x-a$ で割った余りは $f(a)$ であることが分かる。これが剰余定理と呼ばれるものである。また、これより $f(x)$ が $x-a$ で割り切れるための条件は $f(a) = 0$ であることも分かる。これが因数定理と呼ばれるものである。

ここでは、 a_1, a_2, \dots, a_n が互いに異なるときに $f(x)$ が $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ で割り切れるための条件を考える。

定理 (拡張された因数定理)

a_1, a_2, \dots, a_n が互いに異なるとき、次は同値である。

- (1) $f(x)$ は $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ で割り切れる。
- (2) $f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_n) = 0$ である。

(1) \implies (2)

$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)h(x)$ と書けるので、 $x = a_1, a_2, \dots, a_n$ を代入すると $f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_n) = 0$ となる。

(2) \implies (1)

$f(a_1) = 0$ であるから因数定理より $f(x) = (x-a_1)h_1(x) \cdots 1$ と書ける。1 に $x = a_2$ を代入すると $f(a_2) = (a_2-a_1)h_1(a_2)$ となるが、仮定より $f(a_2) = 0$ であるから $(a_2-a_1)h_1(a_2) = 0$ となる。ここで $a_2 \neq a_1$ であるから $h_1(a_2) = 0$ である。よって因数定理より $h_1(x) = (x-a_2)h_2(x)$ と書ける。これを 1 に代入すると $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)h_2(x) \cdots 2$ となる。次に 2 に $x = a_3$ を代入すると $f(a_3) = (a_3-a_1)(a_3-a_2)h_2(a_3)$ となる。仮定より $f(a_3) = 0$ であるから $(a_3-a_1)(a_3-a_2)h_2(a_3) = 0$ である。ここで a_1, a_2, a_3 は互いに異なるので $h_2(a_3) = 0$ である。よって因数定理より $h_2(x) = (x-a_3)h_3(x)$ と書ける。これを 2 に代入すると $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)h_3(x)$ となる。以下同様の議論によって $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n)h_n(x)$ となる。■

a_1, a_2, \dots, a_n の中に同じものが含まれているときは、この定理は成り立たないので注意すること。実際 $f(x) = (x-1)(x-2)$ とすると $f(1) = f(1) = 0$ だが $f(x)$ は $(x-1)(x-1) = (x-1)^2$ では割り切れない。

[例] $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 4$ を満たす 3 次の係数が 1 の 3 次式 $f(x)$ は $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$ である。

$F(x) = f(x) - x^2$ とおくと $F(x)$ は 3 次の係数が 1 の 3 次式である。仮定より $F(0) = F(1) = F(2) = 0$ であるから $F(x)$ は $x(x-1)(x-2)$ で割り切れるが $F(x)$ は 3 次式であるから商は定数である。よって $F(x) = ax(x-1)(x-2)$ となる。しかし, $F(x)$ の 3 次の係数は 1 であるから $a = 1$ となる。従って $F(x) = x(x-1)(x-2)$ となり $f(x) = x(x-1)(x-2) + x^2 = x^3 - 2x^2 + 2x$ である。//

2 多項式の一一致の定理

定理 (多項式の一一致の定理)

$f(x), g(x)$ はともに n 次以下の多項式とする。
 $n+1$ 個の互いに異なる数 $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ に対して

$$f(a_1) = g(a_1), f(a_2) = g(a_2), \dots, f(a_n) = g(a_n), f(a_{n+1}) = g(a_{n+1})$$

となるなら $f(x)$ と $g(x)$ は同じ多項式である。

$F(x) = f(x) - g(x)$ とおくと $F(x)$ も n 次以下の多項式である。仮定より $F(a_1) = F(a_2) = \dots = F(a_n) = F(a_{n+1}) = 0$ である。 $F(a_1) = F(a_2) = \dots = F(a_n) = 0$ であるから拡張された因数定理より $F(x)$ は $(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ で割り切れる。 $F(x)$ は n 次以下であるから $F(x)$ を $(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ で割ったときの商は定数である^{注1}。よって $F(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ と書ける。ここで仮定より $F(a_{n+1}) = 0$ でもあるから $0 = F(a_{n+1}) = A(a_{n+1} - a_1)(a_{n+1} - a_2) \cdots (a_{n+1} - a_n)$ となるが, $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ は互いに異なるので $A = 0$ とならざるを得ない。よって $F(x) = 0$ となり $f(x) = g(x)$ (同じ多項式) である。■

[例] $x \neq 0, 1, 2$ なる任意の実数 x に対して

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \cdots 1$$

となる定数 A, B, C の値は $A = \frac{1}{2}, B = -1, C = \frac{1}{2}$ である。

^{注1}もし, 商が x を含むようであれば $F(x)$ は $n+1$ 次以上になってしまう。

1 より $x \neq 0, 1, 2$ のときつねに $1 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1) \cdots 2$ となる。 $f(x) = 1$, $g(x) = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)$ とおくと $f(x)$, $g(x)$ はともに 2 次以下の多項式である。また $x \neq 0, 1, 2$ のときつねに $f(x) = g(x)$ であるから, 特に $f(3) = g(3)$, $f(4) = g(4)$, $f(5) = g(5)$ である。よって一致の定理より $f(x)$ と $g(x)$ は同じ多項式である。従って 2 は $x = 0, 1, 2$ のときも含めて成り立つ^{注2}。

そこで 2 に $x = 0$ を代入すると $1 = 2A$ となり $A = \frac{1}{2}$ である。 2 に $x = 1$ を代入すると $1 = -B$ となり $B = -1$ である。更に 2 に $x = 2$ を代入すると $1 = 2C$ となり $C = \frac{1}{2}$ である。逆に $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$ のとき $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$ であり, また $f(x)$, $g(x)$ はともに 2 次以下であるから一致の定理より $f(x)$ と $g(x)$ は同じ多項式となる。従って 1 が成り立つ。//

^{注2}もちろん 1 には $x = 0$ や $x = 1$ を代入することはできない。