

# 1 代数学の基本定理

有界閉集合上の連続な実数値関数は最大値・最小値をもつ<sup>注1</sup>ことを利用して、複素数係数の  $n$  次方程式は必ず解をもつことを示す。

## (代数学の基本定理)

$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$  ( $a_i \in \mathbb{C}$ ,  $n \geq 1$ ,  $a_n \neq 0$ ) とするとき、 $f(z) = 0$  は必ず解をもつ。

(1)  $|z|$  を大きくすれば、 $|f(z)|$  をいくらでも大きくできる。

$$f(z) = a_n z^n \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} \right) \text{ である。}$$

三角不等式<sup>注2</sup>より

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} \right| \\ & \leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \left| \frac{1}{z} \right| + \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right| \left| \frac{1}{z} \right|^2 + \cdots + \left| \frac{a_1}{a_n} \right| \left| \frac{1}{z} \right|^{n-1} + \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \left| \frac{1}{z} \right|^n \end{aligned}$$

$|z|$  を大きくすれば、

$$\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \left| \frac{1}{z} \right| + \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right| \left| \frac{1}{z} \right|^2 + \cdots + \left| \frac{a_1}{a_n} \right| \left| \frac{1}{z} \right|^{n-1} + \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \left| \frac{1}{z} \right|^n$$

をいくらでも小さくすることができるので、

$$\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} \right|$$

をいくらでも小さくすることができる。そこで、例えば

$$\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} \right| < \frac{1}{2}$$

<sup>注1</sup> このことの証明は後で示す。

<sup>注2</sup>  $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

にしておく、三角不等式より

$$\begin{aligned} & \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} \right| \\ & \geq \left| 1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} \right| \right| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。よって  $|z|$  を十分大きくすれば

$$|f(z)| > \frac{|a_n|}{2} |z|^n$$

となる。従って、更に  $|z|$  を大きくしていけば、 $|f(z)|$  はいくらでも大きくできる。■

(2)  $f(w) \neq 0$  なら、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して

$$|s - w| < \varepsilon \quad \text{かつ} \quad |f(s)| < |f(w)|$$

となる  $s$  が存在する。

$f(z)$  を  $z - w$  で割って、余りを出す操作を繰り返すと

$$f(z) = f(w) + b_1(z - w) + b_2(z - w)^2 + \cdots + b_n(z - w)^n$$

の形に書ける。 $b_1, b_2, \dots, b_n$  のうち最初に 0 でないものを  $b_m$  とし、

$$f(z) = f(w) + b_m(z - w)^m + b_{m+1}(z - w)^{m+1} + \cdots + b_n(z - w)^n \quad (b_m \neq 0)$$

とする。よって  $h$  を任意の複素数とすると

$$f(h + w) = f(w) + b_m h^m + b_{m+1} h^{m+1} + \cdots + b_n h^n$$

$h \neq 0$  で  $|h| < \varepsilon$  かつ  $|f(h + w)| < |f(w)|$  となるものの存在を示せばよい。

$$\begin{aligned} & b_m h^m + b_{m+1} h^{m+1} + \cdots + b_n h^n \\ & = b_m h^m + b_m h^m \left\{ \frac{b_{m+1}}{b_m} h + \cdots + \frac{b_n}{b_m} h^{n-m} \right\} \end{aligned}$$

であるから  $\beta = \frac{b_{m+1}}{b_m} h + \cdots + \frac{b_n}{b_m} h^{n-m}$  とおくと

$$f(h + w) = f(w) + b_m h^m + b_m h^m \beta$$

である。

$\arg(b_m h^m) = \arg(f(w)) + \pi$  となるように  $\arg(h)$  を決める。更に、 $|h|$  を十分小さくすれば

$$|b_m h^m| < |f(w)| \quad \text{かつ} \quad |\beta| < \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad |h| < \varepsilon$$

とできる。このとき  $P(f(w))$ ,  $Q(f(h+w))$  とし、また、複素数平面上で考えて  $b_m h^m$  の表すベクトルを  $\vec{v}$  ( $\neq \vec{0}$ ),  $b_m h^m \beta$  の表すベクトルを  $\vec{u}$  とすると

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{v} + \vec{u}$$

で、 $\vec{v}$  は  $\vec{OP}$  と逆向きであり、また  $|\vec{v}| < OP$ ,  $|\vec{u}| < \frac{1}{2}|\vec{v}|$  である。よって

$$\begin{aligned} |\vec{OQ}| &= |\vec{OP} + \vec{v} + \vec{u}| \\ &\leq |\vec{OP} + \vec{v}| + |\vec{u}| \\ &= |\vec{OP}| - |\vec{v}| + |\vec{u}| \quad \text{☞ } \vec{v} \text{ は } \vec{OP} \text{ と逆向き} \\ &< |\vec{OP}| - |\vec{v}| + \frac{1}{2}|\vec{v}| \quad \text{☞ } |\vec{u}| < \frac{1}{2}|\vec{v}| \\ &= |f(w)| - \frac{1}{2}|\vec{v}| \\ &< |f(w)| \end{aligned}$$

となるので  $|f(h+w)| < |f(w)|$  となり示された。■

(3)  $f(z) = 0$  は解をもつ。

$\alpha$  を任意にとる。

$f(\alpha) = 0$  なら  $z = \alpha$  が解であるから、 $f(\alpha) \neq 0$  とする。

(1) より、 $R > 0$  を十分大きくとれば、 $|z| = R$  のとき  $|f(z)| > |f(\alpha)|$  となるようにできる。  $D = \{ w \mid |w| \leq R \}$  とおく。

$|z| = R$  のとき、 $|f(z)| > |f(\alpha)|$  であるから、 $|f(z)|$  は  $D$  の境界上では最小値をとらないことになる。しかし、

$$z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R}), \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R})$$

とおくとき  $|f(z)| = \sqrt{u(x,y)^2 + v(x,y)^2}$  は有界閉集合  $K = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$  上の連続関数であるから最小値をもつ。従って、 $|f(z)|$  は  $D$  の内部に最小値をもつことになる。

$w$  を  $D$  の内部の点とすると、 $f(w) \neq 0$  なら (2) より、 $|f(u)| < |f(w)|$  となる  $u$  が  $w$  の十分近く、従って  $D$  の内部に存在するので  $|f(w)|$  は最小値ではない。よって、 $D$  の内部の任意の点  $w$  に対して  $|f(w)| \neq 0$  とすると  $|f(z)|$  は  $D$  の内部で最小値をとることに反する。従って、 $f(w) = 0$  となる  $w$  が  $D$  の内部に存在する。つまり  $D$  の内部に  $f(z) = 0$  は解をもつ。■

## 2 有界閉集合上の連続な実数値関数

有界閉集合上の連続な実数値関数は、最大値・最小値をもつことを示す。そのために準備から始める。

### 2.1 compact な集合

集合  $S$  の任意の開被覆に対して、そのうちの有限個で既に  $S$  が覆われているとき、 $S$  は compact であるという。

$S$  が compact なら、 $S$  は有界閉集合であることが次のようにして分かる。

$S$  に属する各点  $P$  に対して、その  $\varepsilon$ -近傍  $U(P)$  をとる。そうすると  $\mathcal{U} = \{U(P) \mid P \in S\}$  は  $S$  の開被覆である。従って、このうちの有限個で  $S$  は覆われるから  $S$  は有界である。

次に、 $S$  が閉集合であることを示すために、 $Q$  が  $S$  に属さない点なら  $Q$  は  $S$  の境界点ではない（従って、境界点はすべて  $S$  に属することになる）ことを示す。

各  $P \in S$  に対して  $\delta = \frac{PQ}{3}$  とおき、 $P$  の  $\delta$ -近傍  $V(P)$  を考える。 $\{V(P) \mid P \in S\}$  は  $S$  の開被覆であるから、このうちの有限個  $V(P_1), V(P_2), \dots, V(P_n)$  で  $S$  は覆われる。 $V(P_i)$  の半径の最小値を  $r$  として、 $Q$  の  $r$ -近傍  $U(Q)$  を考えると  $i = 1, 2, \dots, n$  に対して  $V(P_i) \cap U(Q) = \phi$  である。よって  $S \cap U(Q) = \phi$  となり  $Q$  は  $S$  の境界点ではない。■

この逆が成り立つというのが Heine–Borel の被覆定理である。

### 2.2 集積点

$P$  が集合  $S$  の集積点であるとは、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $P$  の  $\varepsilon$ -近傍  $U_\varepsilon(P)$  をとるとき、 $U_\varepsilon(P) \cap S$  が無限集合となることである。

集積点の任意の近傍は  $S$  に属する点を含むから、集積点は  $S$  の内点または境界点でなければならない。

(補題)

$P$  が  $S$  の集積点になるための必要十分条件は

$$P_n \in S, P_n \neq P, \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$$

となる点列  $\{P_n\}$  が存在することである。

$P$  が集積点であるとする。

$$U_1(P) \cap S, U_{\frac{1}{2}}(P) \cap S, \dots, U_{\frac{1}{n}}(P) \cap S, \dots$$

はどれも無限集合であるから、これらからそれぞれ互いに異なる点で  $P$  でないもの

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$$

をひとつずつ選ぶことができる。そして  $|P_n P| < \frac{1}{n}$  であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$  である。

逆に、 $P_n \in S, P_n \neq P, \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$  とする。

$\varepsilon > 0$  を任意にとると、十分大きな番号  $N$  に対して  $n \geq N$  のとき、つねに  $|P_n P| < \varepsilon$  である。 $P_N, P_{N+1}, \dots$  は  $U_\varepsilon(P)$  に含まれるが、 $P_n \neq P$  であるから、この中には、異なるものが無限に多くある。よって  $U_\varepsilon(P) \cap S$  は無限集合となり、 $P$  は集積点である。■

## 2.3 区間縮小法

点列の収束に関する Cauchy の判定法を示す。

(定理) (Cauchy の判定法)

点列  $\{P_n\}$  が収束するための必要十分条件は、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、ある番号  $N$  が存在して

$$n, m \geq N \text{ ならば、つねに } |P_m P_n| < \varepsilon$$

となることである。

点列  $\{P_n(x_n, y_n)\}$  が収束するとは、 $\{x_n\}, \{y_n\}$  が収束することと同値である。

$$|P_n P_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} \text{ であるから、}$$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, |y_n - y_m| < \varepsilon \text{ ならば } |P_n P_m| < \sqrt{2\varepsilon^2} = \sqrt{2}\varepsilon \text{ である。}$$

また、 $|P_n P_m| < \varepsilon$  ならば  $\sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} \geq |x_n - x_m|, |y_n - y_m|$  より

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, |y_n - y_m| < \varepsilon \text{ となる。}$$

従って、数列の場合の Cauchy の判定法より示された。■

有界な集合  $S$  内の任意の 2 点  $P, Q$  の距離  $|PQ|$  の距離の上限を  $S$  の直径といい、 $\delta(S)$  と書く。

## (定理) (区間縮小法)

空でない有界閉集合の列  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  が次の 2 条件を満たすなら, これらの閉集合  $S_n$  のすべてに属する点  $P$  が存在する。

$$(i) S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots \supseteq S_n \supseteq \dots$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(S_n) = 0$$

各  $S_n$  から点  $P_n$  をひとつずつ選んで点列  $\{P_n\}$  を作ると  $\{P_n\}$  は収束する。

実際 (ii) より, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し, ある番号  $N$  があって  $n \geq N$  のとき  $\delta(S_n) < \varepsilon$  となる。 $p \geq q \geq N$  のとき (i) より  $P_p \in S_p \subset S_q$  であるから,  $P_p, P_q$  はともに  $S_q$  に属する。従って  $|P_p P_q| \leq \delta(S_q) < \varepsilon$  となる。よって Cauchy の判定法によって  $\{P_n\}$  は収束する。

そこで  $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$  とおく。もし  $P \notin S_k$  とすると,  $n \geq k$  なるすべての  $n$  について  $P \notin S_n$  となる。従って,  $P_n \neq P$  である。そして  $P_n \in S_n \subseteq S_k$  ( $n \geq k$ ), また  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$  となるので  $P$  は  $S_k$  の集積点である。従って,  $P$  は  $S_k$  の内点または境界点となるが,  $S_k$  は閉集合であるから  $P \in S_k$  となり矛盾である。従って, すべての  $n$  に対して  $P \in S_n$  である。■

## (定理) (Heine–Borel の被覆定理)

有界閉集合は compact である。

$S$  を有界閉集合とし,  $\mathcal{U}$  を  $S$  の任意の開被覆とする。 $\mathcal{U}$  に属する有限個の開集合で  $S$  が覆われることを背理法で示す。

$\mathcal{U}$  に属する有限個の開集合では覆われない仮定する。

$S$  は有界であるから十分大きな正方形  $\Delta = \left\{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, a \leq y \leq b \right\}$  に含まれる。

$$\delta(\Delta) = \frac{b-a}{2} = \delta \text{ とおく。} \Delta \text{ を, その中心 } \left( \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} \right) \text{ を通り座標軸に平行な 2 直線}$$

によって 4 等分する。これらの各小正方形と  $S$  の 4 つの共通部分である有界閉集合がすべて  $\mathcal{U}$  に属する有限個の開集合で覆われたなら,  $S$  が有限個の開集合で覆われることになるから, 少なくともひとつは有限個の開集合では覆われない。そこで, 小正方形と  $S$  の共通部分である有界閉集合のうち有限個の開集合で覆われないものをひとつ選んで  $S_1$  とする。

$\delta(S_1) \leq \frac{\delta}{2}$  である。次に, 同じ操作を  $S_1$  に対して行なって  $S_2$  を得る。 $\delta(S_2) \leq \frac{\delta}{2^2}$  である。

以下この操作を繰り返すと,  $\mathcal{U}$  に属する有限個の開集合では覆われないような有界閉集合の列  $S \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots \supseteq S_n \dots$ ,  $\delta(S_n) \leq \frac{\delta}{2^n}$  を得る。そして  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(S_n) = 0$  となるから, 区間縮小法によって, すべての  $S_n$  に含まれる点  $P$  が存在する。

$P \in S$  であるから,  $\mathcal{U}$  に含まれるひとつの開集合  $U$  で  $P$  を含むものがある。 $U$  は開集合であるから, 十分小さい  $\varepsilon > 0$  をとって, その  $\varepsilon$ -近傍を考えると  $U_\varepsilon(P) \subseteq U$  となる。そこで  $\frac{\delta}{2^n} < \varepsilon$  となるような  $n$  をとると  $\delta(S_n) \leq \frac{\delta}{2^n}$  であるから,  $\delta(S_n) < \varepsilon$  となる。そうする

と  $S_n \subseteq U_\varepsilon(P) \subseteq U$  であるから、 $S_n$  は  $\mathcal{U}$  に属する開集合  $U$  (1個の開集合) で覆われているので、 $S_n$  が  $\mathcal{U}$  に属する有限個の開集合で覆われないことに反して矛盾である。■

Heine–Borel の定理を用いて、Weierstrass の定理を示そう。

(定理) (Weierstrass の定理)

有界な無限集合は、集積点をもつ。

$S$  を有界な無限集合とし、 $S$  は集積点をもたないと仮定する。

$S$  は閉集合である。実際、 $P$  を  $S$  の境界点とする。 $S$  は集積点をもたないので、 $P$  は集積点ではない。従って、十分小さな  $\varepsilon > 0$  をとれば、 $P$  の  $\varepsilon$ -近傍  $U$  には  $S$  の点は有限個しか含まれない。もし、 $P \notin S$  とすると  $S$  に含まれる  $U$  内の点  $P_1, \dots, P_m$  に対して  $\min P_m P = r$  とするとき、 $P$  の  $\frac{r}{2}$ -近傍には  $S$  内の点が含まれないことになる。しかし、これは  $P$  が境界点であることに反する。よって  $P \in S$  である。従って  $S$  は境界点をすべて含むので閉集合である。 $S$  内の各点  $P$  は集積点ではないので、各点  $P$  に対して十分小さな  $\varepsilon_P > 0$  をとれば、 $P$  の  $\varepsilon_P$ -近傍  $U_{\varepsilon(P)}$  は  $S$  の点を有限個しか含まない。そして  $S \subseteq \bigcup_P U_{\varepsilon(P)}$  であるが、 $S$  は有界閉集合つまり compact であるから、このうちの有限個で覆われている。従って  $S$  には有限個の点しか存在しないことになり矛盾である。■

## 2.4 連続関数の最大値・最小値

有界閉集合上で連続な実数値関数が最大値・最小値をもつことを示すために、次の準備から始める。

(定理)

有界な点列は、収束部分点列を含む。

$S = \{P_i \mid i = 1, 2, 3, \dots\}$  とおく。 $P_i$  の中には同じ点が何度も現れて、 $S$  が有限集合となる可能性もある。しかし、このときは、 $P \in S$  で無限に多くの  $P_i$  に対して  $P_i = P$  となるのだから、このような点列は、 $P$  に収束する部分点列となり OK。

そこで、どの  $P \in S$  に対しても  $P_i = P$  となる  $i$  は有限個しかないとする。そうすると  $S$  は有界な無限集合であるから、Weierstrass の定理によって集積点をもつことが分かる。

そこで、 $Q$  を  $S$  のひとつの集積点とする。 $Q$  は集積点であるから、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $|QP_n| < \varepsilon$  となる  $P_n$  が無数に多くある。



そこで、まず  $|\mathbf{QP}|_{n(1)} < 1$  となる  $\mathbf{P}_{n(1)}$  をとる。

ここで、 $n \geq n(1)$  なる  $n$  に対してつねに  $|\mathbf{QP}_n| \geq \frac{1}{2}$  とすると、 $|\mathbf{QP}_n| < \frac{1}{2}$  となる  $\mathbf{P}_n$  は高々  $n(j)$  個しかなく、 $\mathbf{Q}$  が集積点であることに反する。よって  $n(1) < n(2)$  なる  $n(2)$  で  $|\mathbf{QP}_{n(2)}| < \frac{1}{2}$  となるものがある。以下同様にして

$$|\mathbf{QP}_{n(j)}| < \frac{1}{2^j} \quad \text{で} \quad n(1) < n(2) < \cdots < n(j) < \cdots$$

となるものがある。このとき、 $\lim_{j \rightarrow \infty} |\mathbf{QP}_{n(j)}| = 0$  である。■

(定理)

$xy$  平面上の有界閉集合  $K$  上の連続な、実数値関数  $z = f(P)$  は最大値・最小値をもつ。

(1)  $f(K) = \{f(P) \mid P \in K\}$  は有界である。

値域が有界でないとすると、 $K$  内の点列  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \dots$  で  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(\mathbf{P}_n)| = \infty$  となるものがある。

一方、 $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \dots\} \subseteq K$  は有界な点列であるから、収束部分点列  $\{\mathbf{P}_{n(1)}, \mathbf{P}_{n(2)}, \mathbf{P}_{n(3)}, \dots\}$  を含む。そうすると  $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{n(j)} = A$  とするとき、 $f(P)$  の連続性から  $\lim_{j \rightarrow \infty} f(\mathbf{P}_{n(j)}) = f(A)$  となるが、これは  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(\mathbf{P}_n)| = \infty$  に反して矛盾である。

(2)  $f(K) = \{f(P) \mid P \in K\}$  の上限  $\alpha$  が  $f(P)$  の最大値である。

(1) より  $f(K)$  は有界であるから上限  $\alpha$  が存在する。 $\alpha$  が最大値でなかったと仮定すると、任意の  $\mathbf{P} \in K$  に対して、つねに  $f(\mathbf{P}) < \alpha$  である。そこで  $g(\mathbf{P}) = \frac{1}{\alpha - f(\mathbf{P})}$  を考えると、 $g(\mathbf{P})$  は  $K$  上の連続関数である。 $\alpha$  が上限であることより、 $f(\mathbf{P})$  はいくらでも  $\alpha$  に近い値をとりうるので  $g(\mathbf{P})$  はいくらでも大きい値をとる。しかし、これは (1) の「有界閉領域上の連続関数の値域は有界である」という結果に反して矛盾である。よって  $\alpha$  は最大値である。

同様に、下限を考えれば最小値を得る。

以上で、有界閉集合上の連続関数は、最大値・最小値をもつことが分かった。■